Catalanova čísla

1. Přípustnou cestou v mříži $n \times n$ rozumíme cestu po hranách mříže, která začíná v levém dolním rohu $[0, 0]$, v každém kroku pokračuje vpravo nebo nahoru a končí v pravém horním rohu $[n, n]$. a) Určete počet přípustných cest v mříži 9×9, které procházejí bodem $[3, 3]$ a zároveň neprocházejí bodem $[6, 6]$. b) Jak se změní výsledek, jestliže se omezíme pouze na cesty, které nikdy neklesnou pod diagonálu?

2. Házíme opakovaně mincí a zaznamenáváme si, kolikrát padla která strana. Jaká je pravděpodobnost, že po $2n$ hodech poprvé napočítáme stejně rubů i líců?

3. Ve volbách soupeří dva kandidáti, M a N. Pro M hlasovalo m voličů a pro N hlasovalo n voličů, přičemž $n > m$. Jestliže pořadí sčítání hlasů je náhodné, jaká je pravděpodobnost, že v průběhu sčítání měl N vždy ostře více hlasů než M?

4. Uvažujme cesty po hranách čtvercové sítě o rozměrech 8×5 z levého dolního rohu $O = [0, 0]$ do pravého horního rohu $P = [8, 5]$. Každá přípustná cesta se skládá pouze z kroků vedoucích vpravo nebo nahoru.

   a) Kolik existuje přípustných cest, které nikdy nevystoupí nad přímku $y = x$ a dotýkají se jí právě v bodech O a $Q = [4, 4]$?

   b) Kolik existuje přípustných cest, které nikdy nevystoupí nad přímku $y = x$ a dotýkají se jí právě v bodě O?
   Návod: Určete počet nepřípustných cest (v závislosti na prvním kroku) nebo počítejte cesty z P do O převodem na úlohu o frontě před pokladnou.