

## Úlohy vedoucí na rekurentní rovnice

1. Uvažujme následující variantu hlavolamu hanojské věže: Jsou dány 3 kolíky; na prvním z nich je postavena věž z  $n$  kotoučů seřazených podle velikostí (největší je vespod), ostatní jsou prázdné. V každém kroku lze přenést jeden kotouč mezi prvním a druhým kolíkem, nebo mezi druhým a třetím kolíkem, a to tak, že větší kotouč nikdy nesmí ležet na menším. Jaký je nejmenší počet kroků potřebný k přenesení věže z prvního na třetí kolík?
2. V rovině je nakresleno  $n + k$  přímek, z nichž žádné tři nemají společný bod,  $k$  přímek je navzájem rovnoběžných a žádné jiné dvě nejsou rovnoběžné. Nechť  $a(n, k)$  je počet oblastí, na které je rovina těmito přímkami rozdělena. Najděte rekurentní rovnici pro  $a(n, k)$  a vyřešte ji.  
Návod: Je možné sestavit rekurentní rovnici vzhledem ke  $k$ , nebo vzhledem k  $n$ . Vykoušejte, že obě možnosti vedou ke stejnému výsledku.
3. Uvažujme následující variantu úlohy o zajatcích: Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Zajatci s čísly  $1, \dots, n$  stojí vedle sebe v řadě. Věznitel kolem nich prochází zleva doprava, přitom nechává popravit každého druhého zajatce (tj. zajatce  $2, 4, 6, \dots$ ). Poté se vrací zpět zprava doleva, všimá si pouze zbývajících živých zajatců a opět nechává naživu každého druhého (pokud je počet zajatců lichý, tak poslední je počítán pouze jednou, tedy přežije). Na začátku řady se opět obrátí a takto pokračuje až do okamžiku, než zůstane naživu poslední zajatec; tomu bude udělena milost. Nechť  $w(n)$  značí číslo zajatce, který dostane milost (zřejmě  $w(1) = 1$ ). Najděte rekurentní vztahy pro  $w(n)$  a použijte je k sestavení tabulky hodnot  $w(1), \dots, w(8)$ .
4. Kruh je rozdělen na  $n$  shodných výsečí očíslovaných čísly  $1, \dots, n$ . Kolika způsoby je můžeme obarvit pomocí  $k \geq 3$  barev tak, aby sousední výseče měly vždy různé barvy? Obarvení lišící se otočením považujeme za různá. Najděte rekurentní rovnici pro hledaný počet a vyřešte ji.  
Návod: Kolik by existovalo možností, kdyby výseče 1 a  $n$  mohly mít stejnou barvu?

