Věžové polynomy a permutace s omezujícími podmínkami

Věta. Jsou-li S_1, S_2 nezávislé sítě, pak platí $v(x, S_1 \cup S_2) = v(x, S_1) \cdot v(x, S_2)$.

Věta. Nechť je dána síť S a políčko $w \in S$. Jestliže S_w značí síť $S \setminus \{w\}$ a S'_w značí síť vzniklou ze sítě S odstraněním všech políček ležících ve stejném řádku nebo sloupci jako w, pak platí $v(x, S) = v(x, S_w) + x \cdot v(x, S'_w)$.

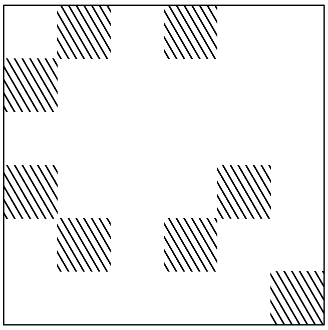
Věta. Počet permutací $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ s omezujícími podmínkami odpovídajícími síti S je $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)!$.

Cvičení

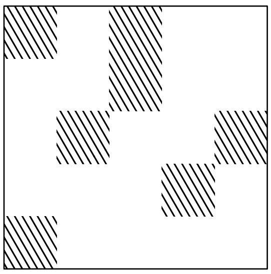
1. Rozhodněte, které z následujících polynomů mohou být věžovým polynomem nějaké sítě. (Najděte příklad nebo zdůvodněte, proč žádná taková síť neexistuje.)

   a) $1 - 3x$, b) $1 + 4x + 2x^2$, c) $(1 + 4x + 2x^2)^2$, d) $1 + 2x + 2x^2$.

2. Najděte věžový polynom následující sítě. Kolika způsoby lze na políčka sítě umístit 3 neohrožující se věže?



3. Najděte věžový polynom následující sítě. Kolika způsoby lze na nevyšrafovaná políčka umístit 5 neohrožujících se věží?



4. Na zábavě se sešlo pět manželských párů, muži $M_1, \ldots, M_5$ a ženy $\check{Z}_1, \ldots, \check{Z}_5$ (M_i a $\check{Z}_i$ jsou manželé). Kolika způsoby z nich lze sestavit smíšené taneční dvojice, jestliže chceme, aby manželé nikdy netančili spolu a dále víme, že $\check{Z}_2$ nechce tančit s M_1, $\check{Z}_3$ nechce tančit s M_2 a $\check{Z}_4$ nechce tančit s M_3?