Princip inkluze a exkluze

Dvě varianty principu inkluze a exkluze

Pokud A je konečná množina a $A_1, \ldots, A_n \subset A$, pak platí

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|,$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |A| - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Cvičení

1. Balíček karet obsahuje 52 karet s hodnotami 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A, přičemž každá hodnota se vyskytuje ve čtyřech různých barvách. Jestliže náhodně vybereme šest karet, jaká je pravděpodobnost, že od každé barvy budeme mít aspoň jednu kartu?

   Vyřešte úlohu dvěma způsoby:

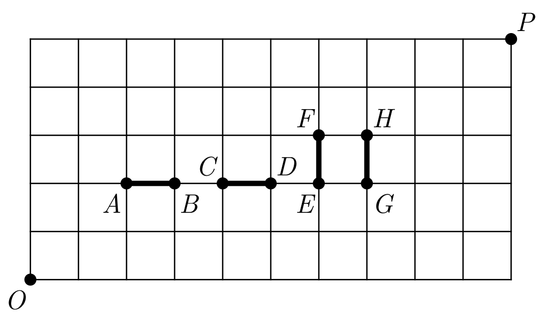
   a) Pomocí principu inkluze a exkluze.

   b) Uvědomte si, že příznivé případy lze rozdělit do dvou kategorií: 1) Tři barvy jsou zastoupeny jednou kartou, jedna barva třemi kartami. 2) Dvě barvy jsou zastoupeny jednou kartou, dvě barvy dvěma kartami. Pro každou kategorii zvlášť vypočítejte počet příznivých případů.

2. Kolika způsoby lze rozestavit n manželských párů do jedné řady tak, aby nikdo nestál vedle svého partnera?

3. Kolik existuje permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$, které mají právě jeden pevný bod? O kolik se tento počet liší od počtu permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ bez pevných bodů?

4. Uvažujme cesty po hranách čtvercové sítě o rozměrech 10×5 z levého dolního rohu O do pravého horního rohu P. Každá přípustná cesta se skládá pouze z kroků vedoucích vpravo nebo nahoru. Kolik existuje přípustných cest, jejichž součástí nejsou úsečky AB, CD, EF, GH znázorněné na obrázku?



5. Jistý výrobce prodává kolekce fotografií fotbalistů. Celkem existuje N různých fotografií, každá kolekce obsahuje $n < N$ náhodně vybraných různých fotografií. Zakoupíme-li celkem $k \ge N/n$ kolekcí, jaká je pravděpodobnost, že nasbíráme všech N různých fotografií?