

Základy kombinatoriky

Standardní cvičení

1. Kolika způsoby lze rozdělit 32 různých karet 4 hráčům tak, aby každý dostal 8 karet?
2. V cukrárně prodávají 10 druhů zákusků. Kolika způsoby lze zakoupit 30 zákusků, jestliže od každého druhu chceme aspoň 2 zákusky?
3. Kolika způsoby lze rozdělit 10 stejných bonbónů mezi 5 dětí, jestliže
 - (a) některé děti nemusejí dostat nic,
 - (b) každé dítě musí dostat aspoň 1 bonbón?

Návod. Zkuste rozdělení bonbónů dětem znázornit pomocí koleček a oddělovačů.

4. V jisté loterii je každý týden taženo 6 různých čísel ze 49. Jaká je pravděpodobnost, že ve dvou po sobě jdoucích týdnech budou tažena různá čísla?
5. V jedné řadě je 9 volných míst. Kolika způsoby na ně můžeme rozesadit 6 studentů a 3 profesory tak, aby každý profesor seděl mezi dvěma studenty? (Studenti musejí sedět hned vedle profesora.)
6. Přirozené číslo d nazveme vzestupné, pokud jeho ciferný zápis má tvar $d_m d_{m-1} \dots d_2 d_1$, kde

$$d_m \leq d_{m-1} \leq \dots \leq d_2 \leq d_1.$$

(Např. číslo 11334 je vzestupné.) Kolik existuje vzestupných přirozených čísel menších než 10^{100} ?

Hledání chyb

7. V úloze 1 o rozdělování 32 karet 8 hráčům student navrhuje řešení

$$\binom{32}{8} + \binom{24}{8} + \binom{16}{8} + \binom{8}{8}.$$

Jak jej přesvědčíte o tom, že jeho výsledek není v pořádku?

8. Na přednášce byla řešena úloha: *Kolik sudých čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se cifry nesmí opakovat?* Student navrhuje toto řešení: Pokud bychom uvažovali nejen sudá, ale i lichá čísla, víme, že celkový počet je $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$. Sudých bude přesně polovina, tj. 150. Jak studentovi vysvětlíte, že toto řešení není v pořádku?

Bonusová cvičení

9. Narozeninový paradox:
 - (a) Jaká je pravděpodobnost, že mezi n náhodně vybranými osobami budou alespoň dva lidé, kteří mají narozeniny ve stejný den? Předpokládejte, že všechna data narození jsou stejně pravděpodobná.

Návod. Jednodušší je výpočet pravděpodobnost opačného jevu.

- (b) Jak velké musí být n , aby tato pravděpodobnost přesáhla $\frac{1}{2}$? K řešení použijte počítač.

10. Soutěžní úloha:

Zkuste vymyslet jednu či více netradičních úloh na kombinatorická pravidla, variace, permutace, kombinace, o kterých si myslíte, že by mohly být atraktivní pro středoškolské studenty.