

Další aplikace geodetických polárních souřadnic

Křivka (neboe po Gaussově úvaze): je-li plocha parametrisována rovnicí $z = z(u, v)$, je její 1. základní forma má tvar

$$\{g_{ij}(u, v)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(u, v) \end{pmatrix}, \text{ kde } v \text{ libovolným bodě, kde } G(u, v) \neq 0, \text{ platí } K(u, v) = - \frac{\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}(u, v)}{\sqrt{G}(u, v)}.$$

1.1 K le vyjádřit pomocí $\{g_{ij}\}$ a $\{b_{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G(u, v)} \end{pmatrix}$

(viz dříve Theorem egregium):

$$K = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial^2 \Gamma_{11}^2}{\partial v^2} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 \right),$$

$$\text{kde } \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 b_{kr} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_r} \right)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} b_{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} \right) = 0$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} b_{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} \right) = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u}$$

$$K = - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - (\Gamma_{12}^2)^2 = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{G} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{G} \right)^2 =$$

$$= - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} G - \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2}{G^2} - \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2}{G^2} = \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} G}{4G^2}$$

$$= - \frac{\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}}{\sqrt{G}} = - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} G^{-1/2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) = - \frac{1}{2\sqrt{G}} \left(- \frac{1}{2} G^{-3/2} \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + G^{-1/2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right)$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} G}{4G^2} \leftarrow \text{shodně výsledky} \quad \square$$

Použití:

1) Rotací plocha neměnná rotací křivky $d(x) = \begin{pmatrix} x(u) \\ z(u) \end{pmatrix}$ má 1. základní formu $\{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} x'(u)^2 + z'(u)^2 & 0 \\ 0 & x(u)^2 \end{pmatrix}$. Je-li d rov. obloukem, pak $\{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x(u)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow K(u, v) = - \frac{x''(u)}{x(u)}$.

2) Je-li obalí bodu P na ploše parametrisována pomocí geodetických polárních souřadnic $f^{\mathbb{R}}$, pak $\{g_{ij}^{\mathbb{R}}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(r, \theta) \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \forall r \in (0, r(\vec{P})) \forall \theta \in \mathbb{R} \quad K(r, \theta) = - \frac{\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}(r, \theta)}{\sqrt{G}(r, \theta)}$.

Věta 1 Některé obaly bodu P na ploše je parametrizováno pomocí geodet. polárních souřadnic $f \in \mathbb{R}^2$ 1. řádkem formou $\{g_{ij}^{\uparrow}(\pi, \theta)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(\pi, \theta) \end{pmatrix}$.

1) Polod k_P je Gaussova křivost v bodě P , pak

$$\sqrt{G}(\pi, \theta) = r - \frac{r^3}{6} k_P + \dots \quad (\text{Taylorův rozvoj 3. řádu se středem } r=0)$$

2) Polod má pevně konstantní Gaussovou křivost k , pak

$$G(\pi, \theta) = \begin{cases} r^2 & \text{polod } k=0, \\ \frac{1}{k} \sin^2(\sqrt{k} r) & \text{polod } k>0, \\ -\frac{1}{k} \sinh^2(\sqrt{-k} r) & \text{polod } k<0. \end{cases}$$

Důk Víme $G(0, \theta) = 0$ ($\Rightarrow \sqrt{G}(0, \theta) = 0$), $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \pi}(0, \theta) = 1$.
 $\forall r \in (0, r(P)) \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad k(\pi, \theta) = - \frac{\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial \pi^2}(\pi, \theta)}{\sqrt{G}(\pi, \theta)}$

$$(*) \quad \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial \pi^2}(\pi, \theta) = -k(\pi, \theta) \sqrt{G}(\pi, \theta)$$

$$\frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial \pi^3}(\pi, \theta) = - \frac{\partial k}{\partial \pi}(\pi, \theta) \sqrt{G}(\pi, \theta) - k(\pi, \theta) \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \pi}(\pi, \theta)$$

$$r \rightarrow 0+ : \quad \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial \pi^2}(0, \theta) = 0, \quad \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial \pi^3}(0, \theta) = -k(0, \theta) = -k_P$$

Taylorův rozvoj:

$$\begin{aligned} \sqrt{G}(\pi, \theta) &= \sqrt{G}(0, \theta) + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \pi}(0, \theta) r + \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial \pi^2}(0, \theta) \frac{r^2}{2!} + \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial \pi^3}(0, \theta) \frac{r^3}{3!} + \dots \\ &= r - k_P \frac{r^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Některé $k(\pi, \theta) = k \quad \forall r \in (0, r(P)) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Volme $\theta \in \mathbb{R}$ pevně a označme $y(r) = \sqrt{G}(\pi, \theta)$.

(*) $\Rightarrow y''(r) + k y(r) = 0$, se spíše často píše i pro $r=0$

Dále $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

Tato lineární dif. rovnice 2. řádu má řešení

$$y(r) = \begin{cases} r & \text{polod } k=0, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k} r) & \text{polod } k>0, \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k} r) & \text{polod } k<0 \end{cases}$$

(leť ověřit dosazením).

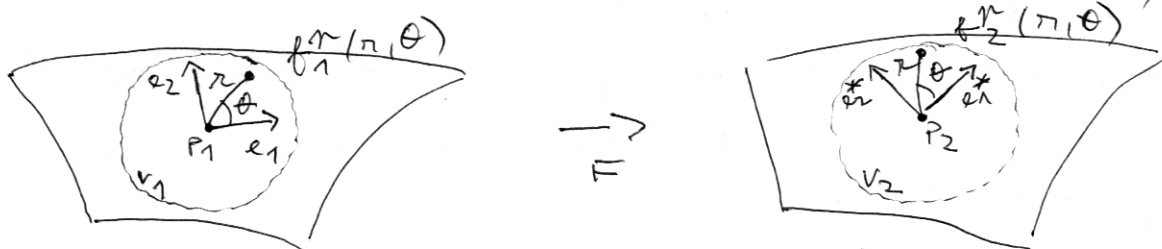
□

Minda (Minding): Staždai dvi regulari placy se stejna
 konstantni Gaussovon křivosti jsou lokálně izometrické.

Dk1 P_1, P_2 ... body na 1. a 2. pláči

$\{e_1, e_2\}, \{e_1^*, e_2^*\}$... ortonomální báze TP_1, TP_2

$f_1^*: [0, r(P_1)) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $f_2^*: [0, r(P_2)) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ } parametrizace okolí P_1, P_2 pomocí
 geodes. polár. souřadnic,
 BUNO $r(P_1) = r(P_2)$



$$F: V_1 \rightarrow V_2, \quad F(f_1^*(r, \theta)) = f_2^*(r, \theta)$$

f_1^* a f_2^* mají stejnou konstantní Gaussovu křivost

\Rightarrow podle předchozí věty mají stejné 1. základní formy

$\Rightarrow F$ je izometrie

□

Pozn. 1 1) Plachy s konstantní nulovou Gaussovou křivostí se nazývají rozvinutelné, jsou lokálně izometrické s rovinou

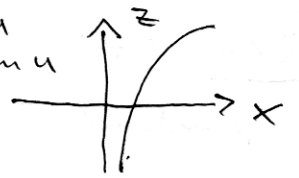
2) Placha s konstantní Gaussovou křivostí je lokálně izometrická sama se sebou \Rightarrow geometrické obrazy na pláči lze bez deformace přesunvat z jednoho místa na druhé

3) V Mindingově větě nelze předpokládat, že Gaussova křivost je konstantní - vte následující příklad.

$$\underline{17)} \quad f_1(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ \ln u \end{pmatrix}$$

$$u \in (0, \infty) \\ v \in \mathbb{R}$$

$$x(u) = u \\ z(u) = \ln u$$



- rotační plocha,
rovižme graf logaritmu

$$f_2(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix}$$

$$u \in (0, \infty) \\ v \in \mathbb{R}$$

- helikoid

Lze vyhodit: $k^1(u, v) = k^2(u, v) = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$

jsou f_1, f_2 lokálně izometrické?

Nechtě F je lokální izometrie, $F(f_1(u, v)) = f_2(\varphi(u, v), \psi(u, v))$,
kde φ, ψ jsou jiné funkce.

$$\{g_{ij}^1\} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{u^2} & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

Theorema egregium: $k^1(u, v) = k^2(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \Rightarrow \varphi(u, v) = u$

$$F(f_1(u, v)) = f_2(u, \psi(u, v)) = \begin{pmatrix} u \cos \psi(u, v) \\ u \sin \psi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F \circ f_1}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos \psi(u, v) \\ \sin \psi(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \begin{pmatrix} -u \sin \psi(u, v) \\ u \cos \psi(u, v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F \circ f_1}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \begin{pmatrix} -u \sin \psi(u, v) \\ u \cos \psi(u, v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{11}^2 = 1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)\right)^2 (u^2 + 1)$$

$$g_{22}^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)\right)^2 (u^2 + 1)$$

$$g_{12}^2 = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) (u^2 + 1)$$

F izometrie $\Rightarrow \{g_{ij}^1\} = \{g_{ij}^2\}$

$$g_{12}^1 = 0 = g_{12}^2 = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) (u^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \forall u, v \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) = 0$$

\Downarrow

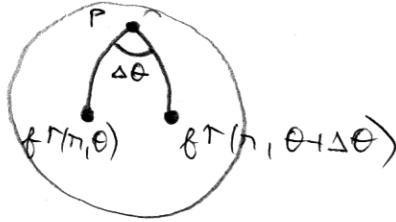
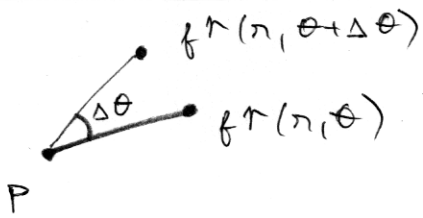
$$g_{11}^2 = 1 \neq g_{11}^1, \\ \text{spr}$$

\Downarrow

$$g_{22}^2 = 0 \neq g_{22}^1, \\ \text{spr}$$

f_1, f_2 nejsou lokálně izometrické.

Radialní radiální geodetiky



$\Delta\theta$ malé, r malé:

$$\|f^r(r, \theta + \Delta\theta) - f^r(r, \theta)\| \doteq \left\| \frac{\partial f^r}{\partial \theta}(r, \theta) \right\| |\Delta\theta| =$$

$$= \sqrt{\frac{\partial f^r}{\partial \theta}(r, \theta) \cdot \frac{\partial f^r}{\partial \theta}(r, \theta)} |\Delta\theta| = \sqrt{G}(r, \theta) |\Delta\theta| \doteq \left(r - \frac{r^3}{6} k_P\right) |\Delta\theta|$$

- v rovině: $k_P = 0$, vzdálenost $\doteq r |\Delta\theta|$
- $k_P > 0$: vzdálenost roste pomaleji než v rovině
- $k_P < 0$: vzdálenost roste rychleji než v rovině

Obvod geodetické kružnice



$$c(\alpha) = f^r(r, \alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

... geodetická kružnice se středem P
a poloměrem r

$$c = f^r \circ \varphi, \quad \text{ kde } \varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, 2\pi] \quad \dots \quad \varphi'(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obvod geodes. kružnice:

$$\sigma = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}^r(\varphi(\alpha)) \varphi_i'(\alpha) \varphi_j'(\alpha)} d\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}^r(r, \alpha)} d\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}(r, \alpha) d\alpha$$

Plocha Δ konstantní křivosti k :

- $k=0 \Rightarrow G(r, \theta) = r^2 \Rightarrow \sigma = \int_0^{2\pi} r d\alpha = 2\pi r$
- $k>0 \Rightarrow G(r, \theta) = \frac{1}{k} \sin^2(\sqrt{k} r) \Rightarrow \sigma = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k} r) d\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k} r)$
- $k<0 \Rightarrow G(r, \theta) = -\frac{1}{k} \sinh^2(\sqrt{-k} r) \Rightarrow \sigma = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k} r) d\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k} r)$

Plocha Δ nekonzstantní křivosti:

$$\sqrt{G}(r, \theta) = r - \frac{r^3}{6} k_P + \dots$$

$$\sigma = \int_0^{2\pi} \left(r - \frac{r^3}{6} k_P + \dots\right) d\alpha = 2\pi r - \frac{\pi}{3} r^3 k_P + \dots$$

Tj. pro malá r platí $\sigma \doteq 2\pi r - \frac{\pi}{3} r^3 k_P$

a obráceně $k_P \doteq \frac{2\pi r - \sigma}{r^3} \frac{3}{\pi}$.

(Steinerova formule: $k_P = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - \sigma}{r^3} \frac{3}{\pi}$)

Obsah oblasku ohnivé geodesickou křivkou

Oblasť ohnivé geodes. křivkou se středem P a poloměrem r má parametrizaci $f(r, \theta)$, $r \in [0, r]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Její obsah:

$$S = \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\det \{g_{ij}^*(r, \theta)\}} d\theta \right) dr = \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{G}(r, \theta) d\theta \right) dr$$

Plocha > křivkami křivosti k :

• $k=0 \Rightarrow G(r, \theta) = r^2$

$$S = \int_0^r \int_0^{2\pi} r d\theta dr = 2\pi \int_0^r r dr = \pi r^2$$

• $k > 0 \Rightarrow G(r, \theta) = \frac{1}{k} \sin^2(\sqrt{k} r)$

$$S = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k} r) d\theta dr = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \int_0^r \sin(\sqrt{k} r) dr = \\ = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \left[-\frac{\cos(\sqrt{k} r)}{\sqrt{k}} \right]_{r=0}^r = \frac{2\pi}{k} (1 - \cos(\sqrt{k} r))$$

• $k < 0 \Rightarrow G(r, \theta) = -\frac{1}{k} \sinh^2(\sqrt{-k} r)$

$$S = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k} r) d\theta dr = \frac{2\pi}{\sqrt{-k}} \int_0^r \sinh(\sqrt{-k} r) dr = \\ = \frac{2\pi}{\sqrt{-k}} \left[\frac{\cosh(\sqrt{-k} r)}{\sqrt{-k}} \right]_{r=0}^r = \frac{2\pi}{k} (1 - \cosh(\sqrt{-k} r))$$

Plocha > nelastickými křivkami:

$$\sqrt{G}(r, \theta) = r - \frac{r^3}{6} k r + \dots$$

$$S = \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(r - \frac{r^3}{6} k r + \dots \right) d\theta dr = 2\pi \int_0^r \left(r - \frac{r^3}{6} k r + \dots \right) dr = \\ = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{24} k r + \dots \right]_0^r = \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} k r + \dots$$

Již pro malá r platí $S \doteq \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} k r$

a obráceně $k r \doteq \frac{\pi r^2 - S}{r^4} \frac{12}{\pi}$

(Konečná formule: $k r = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\pi r^2 - S}{r^4} \frac{12}{\pi} \right)$)

Domácí cvičení (7)

- 1.** Pomocí elementární geometrie (bez použití diferenciálního a integrálního počtu) odvodte vzorec pro obvod geodetické kružnice o poloměru r na sféře o poloměru R . Ověřte, že výsledek je v souladu s tvrzením odvozeným na přednášce.
- 2.** Pomocí Lambertovy projekce odvodte vzorec pro obsah oblasti ohraničené geodetickou kružnicí o poloměru r na sféře o poloměru R . Ověřte, že výsledek je v souladu s tvrzením odvozeným na přednášce.