Exponenciální zobrazení a geodetické souřadnice

$f: U \to \mathbb{R}^3$ regulární, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená

$P = f(u_0, v_0)$ -- bod na ploše

$T_P = \{ a_1 \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + a_2 \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) ;\ a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ .. tečný prostor

Víme: $\forall a \in T_P,\ a \neq 0$ existuje právě jedna geodetika c_a taková, že $c_a(0) = P$, $c_a'(0) = a$.

<u>def.</u> (exponenciální zobrazení):

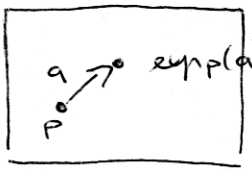
$\forall a \in T_P,\ a \neq 0$ -- $\exp_P(a) = c_a(1)$, je-li pravá strana definována

$\exp_P(0) = P$

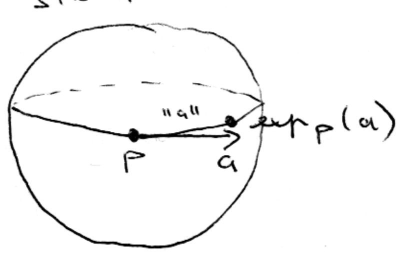
Geometrický význam:

$\exp_P(a)$ = bod na ploše, který leží na geodetice c_a ve vzdál. $\|a\|$ od P

rovina



sfera



jednotk. sféra:

- $\|a\| = k \cdot 2\pi$ $\Rightarrow \exp_P(a) = P$
- $\|a\| = k \cdot 2\pi + \pi$ $\Rightarrow \exp_P(a)$ je bod protilehlý k P

V obou případech $\exp_P(a)$ def. $\forall a \in T_P$, obecně neplatí! (odeber část plochy).

<u>Lemma</u> $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0,\ a \in T_P \Rightarrow c_{\lambda a}(1) = c_a(\lambda)$

<u>Dk</u>
$d(t) = c_a(\lambda t)$

$d'(t) = \lambda c_a'(\lambda t)$

$d''(t) = \underbrace{\lambda^2 c_a''(\lambda t)}_{\parallel n}$

$\Rightarrow$ d je geodetika, $d(0) = c_a(0) = P$, $d'(0) = \lambda c_a'(0) = \lambda a$ $\Big\} \ d = c_{\lambda a}$

$\Downarrow$

$c_{\lambda a}(1) = d(1) = c_a(\lambda)$

<u>Lemma</u> $\forall a \in T_P \quad \frac{d}{dt} \exp_P(ta)\Big|_{t=0} = a$

<u>Dk</u> $\exp_P(ta) = c_{ta}(1) = c_a(t)$

$\frac{d}{dt} \exp_P(ta)\Big|_{t=0} = c_a'(0) = a$

Věta: $\forall P \ \exists\, r(P) > 0$ takové, že

1) $\exp_P(a)$ je definováno $\forall a \in T_P$, $\|a\| < r(P)$,
2) označíme-li $B_{r(P)} = \{a \in T_P;\ \|a\| < r(P)\}$, pak $\exp_P$ je na $B_{r(P)}$ prosté, a obrazem bodů je jisté otevřené okolí V bodu P.

(bez důk. – věta o závislosti řešení DR na poč. podmínkách, věta o inverzním zobrazení)

Myšlenka: Zavedeme-li v T_P ortonormální bázi e_1, e_2, pak libovolný vektor $a \in T_P$ je popsán dvojicí čísel x, y, kde $a = x e_1 + y e_2$.

$a \in B_{r(P)} \iff \sqrt{x^2+y^2} < r(P)$

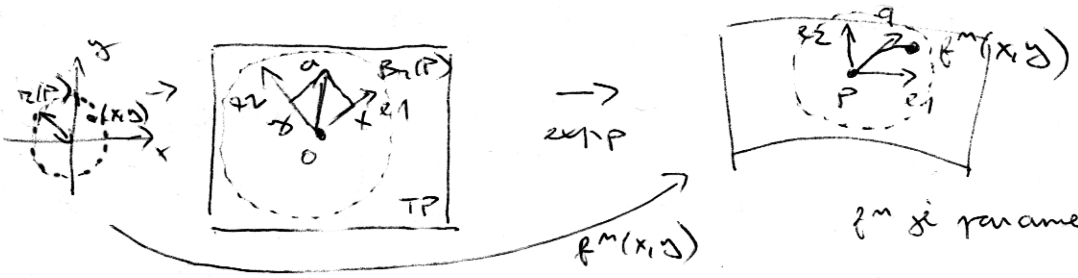
.. každá taková dvojice čísel jednoznačně určuje bod V

def. (geodetické normální souřadnice)

P bod na ploše, $B_{r(P)}$ a V jako v předchozí větě, e_1, e_2 ortonormální báze T_P. Definujme zobrazení

$$f^n(x,y) = \exp_P(x e_1 + y e_2), \qquad x, y \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+y^2} < r(P).$$

(x,y) se nazývají geodetické normální souřadnice bodu $f^n(x,y)$.



f^n je parametrizace V.

Lemma: Je-li $\{g_{ij}^n\}$ 1. základní forma f^n, pak

$$\{g_{ij}^n(0,0)\}_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Dále platí } \frac{\partial f^n}{\partial x} = e_1, \ \frac{\partial f^n}{\partial y} = e_2.$$

Důk:

$$\frac{\partial f^n}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{ds} f^n(s,0)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \exp_P(s e_1)\Big|_{s=0} = e_1$$

$$\frac{\partial f^n}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{ds} f^n(0,s)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \exp_P(s e_2)\Big|_{s=0} = e_2$$

$$\Rightarrow \{g_{ij}^n(0,0)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Důsledek: $\{g_{ij}\}$ regulární v $(0,0)$ $\Rightarrow$ regulární v okolí $(0,0)$

$\Rightarrow$ parametrizace f^n je regulární v okolí $(0,0)$,

BÚNO na celém def. oboru $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2+y^2} < r(P)\}$.

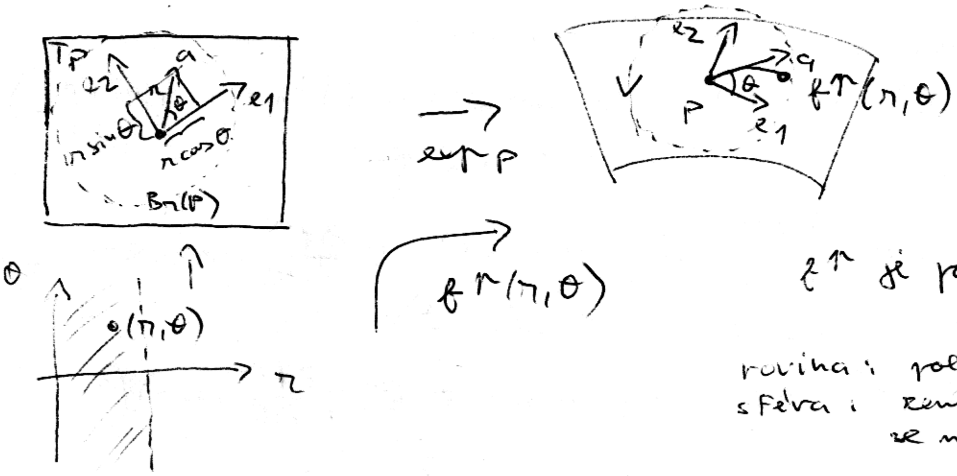
$\Rightarrow \frac{\partial f^n}{\partial x}, \frac{\partial f^n}{\partial y}$ lin. nezávislé

Myšlenka: Každý vektor $a \in T_P$ lze popsat nejen pomocí kartézských souřadnic x, y, ale i pomocí polárních souřadnic r, θ, kde $a = r\cos\theta\, e_1 + r\sin\theta\, e_2$, $r \in [0, r(P))$, $\theta \in \mathbb{R}$.
r určeno jednoznačně, θ až na násobek 2π (je-li $r>0$).

def. (geodetické polární souřadnice):
P bod na ploše, $B_r(P)$ a V jako dříve, e_1, e_2 ortonormální báze T_P.
Definujme zobrazení

$$\hat f(r,\theta) = \exp_P(r\cos\theta\, e_1 + r\sin\theta\, e_2) = \hat f(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad (r,\theta) \in [0, r(P)) \times \mathbb{R}$$

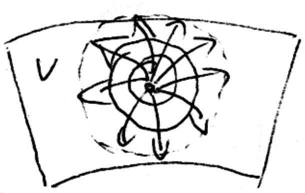
(r,θ) se nazývají geodetické polární souřadnice bodu $\hat f(r,\theta)$.



$\hat f$ je parametrizace V.

rovina: polární souřadnice se středem P
sféra: zeměpisné souřadnice, ale šířka se měří od pólu P

def.
- geodetické kružnice = obrazy křivek $r = \text{konst}$.
- radiální geodetiky = obrazy křivek $\theta = \text{konst}$.



Lemma: Je-li $\{\hat g_{ij}\}$ je 1. základní forma $\hat f$, pak platí:

1) $\forall r \in [0, r(P))\ \forall \theta \in \mathbb{R}\quad \hat g_{11}(r,\theta) = 1$
2) $\forall r \in [0, r(P))\ \forall \theta \in \mathbb{R}\quad \hat g_{12}(r,\theta) = \hat g_{21}(r,\theta) = 0$
(Gaussovo lemma – geodet. kružnice a radiální geodetiky navzájem kolmé)
3) $\forall r \in (0, r(P))\ \forall \theta \in \mathbb{R}\quad \hat g_{22}(r,\theta) > 0$
4) $\forall \theta \in \mathbb{R}\quad \hat g_{22}(0,\theta) = 0$
5) $\forall \theta \in \mathbb{R}\quad \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{\hat g_{22}}\,(0,\theta) = 1$

Dk 1 $\quad f^r(r,\theta) = c_{r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2}(1) = c_{\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2}(r)$

... $r \mapsto f^r(r,\theta)$ je geodetika pro. jednotk. rychlosti!
(rychlost konstantní, směr. vektor jednotkový)

$\Rightarrow \left\| \frac{\partial f^r}{\partial r}(r,\theta)\right\| = 1 \quad \Rightarrow \quad g^r_{11}(r,\theta) = \frac{\partial f^r}{\partial r}(r,\theta)\cdot\frac{\partial f^r}{\partial r}(r,\theta) = 1$

$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f^r(0,\theta) = P \quad \ldots \quad \frac{\partial f^r}{\partial \theta}(0,\theta) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow g^r_{22}(0,\theta) = 0,$

ale také $g^r_{12}(0,\theta) = 0$

$$\frac{\partial g^r_{12}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f^r}{\partial r}\cdot\frac{\partial f^r}{\partial \theta}\right) = \underbrace{\frac{\partial^2 f^r}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial f^r}{\partial \theta}}_{=0 \text{ (geodetika)}} + \frac{\partial f^r}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 f^r}{\partial r\partial\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f^r}{\partial r}\cdot\frac{\partial f^r}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta} g^r_{11} = 0$$

$\Rightarrow g_{12}$ nezávisí na r, tedy $\forall r \quad g_{12}(r,\theta) = g_{12}(0,\theta) = 0$

f^r můžeme chápat jako složené zobrazení

$(r,\theta) \to (x(r,\theta), y(r,\theta)) \xrightarrow{f^n} \exp_P(x(r,\theta)e_1 + y(r,\theta)e_2),$

kde $x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta$

$$\frac{\partial f^r}{\partial\theta} = \frac{\partial f^n}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f^n}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f^n}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f^n}{\partial y}$$

$\neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ pro $r>0$ (netriv. LK lin. nez. vektorů)

$\Rightarrow \left\|\frac{\partial f^r}{\partial\theta}(r,\theta)\right\| > 0 \quad \Rightarrow \quad g^r_{22}(r,\theta) = \left\|\frac{\partial f^r}{\partial\theta}(r,\theta)\right\|^2 > 0$

$$\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{g^r_{22}}(0,\theta) = \lim_{r\to 0+}\frac{\sqrt{g^r_{22}(r,\theta)} - \sqrt{g^r_{22}(0,\theta)}}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0+}\frac{\cancel{r}\left\| -\sin\theta\frac{\partial f^n}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta)) + \cos\theta\frac{\partial f^n}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\right\|}{\cancel{r}}$$

$$= \left\| -\sin\theta\frac{\partial f^n}{\partial x}(0,0) + \cos\theta\frac{\partial f^n}{\partial y}(0,0)\right\|$$

$$= \| -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2 \| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1$$

$\boxtimes$

Důsledek 1 $\quad f^r$ je regulární na $(0, r(P)) \times \mathbb{R}$,
ale ne pro $r = 0$

Věta: $f : U \to \mathbb{R}^3$ regulární, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená, P = bod na ploše.
Pak existuje okolí W bodu P takové, že je-li $c : [a,b] \to W$ geodetika spojující body P a Q $(c(a) = P,\ c(b) = Q)$ a $d : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ je lib. regulární křivka na ploše spojující P a Q, pak pro jejich délky platí $l(c) \le l(d)$.
Je-li $l(c) = l(d)$, pak d splývá s c.

Dk: volme $r(P) > 0$, $B_{r(P)}$ a V jako v def. geodet. polár. souřadnic, $r \in (0, r(P))$, $W = \exp_P(\{a \in T_P ;\ \|a\| \le r\})$.
W je parametrizováno pomocí f^r.
c je radiální geodetika z P do Q (ta, která má v P stejnou derivaci jako c)

a) $d([a,b]) \subset W$ BÚNO $\forall s \in (a,b]$ $r(s) > 0$ (křivka v čase a opustí P a nevrací se, regularita d)

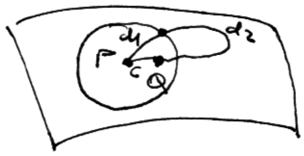
$d = f^r \circ \varphi$, kde $\varphi(s) = (r(s), \theta(s))$, $s \in [a,b]$

$$l(d) = \int_a^b \sqrt{\sum g_{ij}^r(\varphi(s))\, \varphi_i'(s)\, \varphi_j'(s)}\, ds$$
$$= \int_a^b \sqrt{r'(s)^2 + g_{22}(\varphi(s))\, \theta'(s)^2}\, ds \ge \int_a^b \sqrt{r'(s)^2}\, ds \ge$$
$$\ge \int_a^b r'(s)\, ds = r(b) - r(a) = l(c)$$

pol. souř. bodů P, Q

Rovnost nastává $\iff$ $\forall s \in (a,b]$ $\theta'(s) = 0$ ... tedy i pro $s = a$
$\forall s \in [a,b]$ $r'(s) \ge 0$
.. tedy θ je konstantní podél d, r neklesající
$\to$ d splývá s radiální geodetikou c

b) $d([a,b]) \not\subset W$



$s_0 = \min\{s \in [a,b] ;\ d(s) \in \partial W\}$
$d_1 = d|_{[a,s_0]}$, $d_2 = d|_{[s_0,b]}$

a) $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} l(d_1) \ge r \ge l(c) \\ l(d_2) > 0 \end{array}\right\}$ $l(d) = l(d_1) + l(d_2) > l(c)$

Pozn: v případě $l(c) = l(d)$ nemusí být d geodetika (nemusí platit $\|d'\| = $ konst.).

Lemma $d: J \to \mathbb{R}^3$ reg. křivka na ploše, která splývá s jistou geodetikou $c: I \to \mathbb{R}^3$, $\|d'\| = \text{konst.}$ $\Rightarrow$ d je geodetika

Dk $\exists\, \alpha: J \to I \quad \forall s \in J$

$$d(s) = c(\alpha(s))$$
$$d'(s) = c'(\alpha(s))\,\alpha'(s)$$
$$d''(s) = c''(\alpha(s))\,\alpha'(s)^2 + c'(\alpha(s))\,\alpha''(s)$$

$$c'(\alpha(s)) \cdot d'(s)\,\alpha''(s) = \left[d''(s) - c''(\alpha(s))\,\alpha'(s)^2 \right] \cdot d'(s)$$
$$= \underbrace{d''(s) \cdot d'(s)}_{=0\ (\|d'\| = \text{konst.})} - \underbrace{c''(\alpha(s)) \cdot d'(s)}_{\substack{=0 \\ (c''\ \text{kolmý k ploše})}}\,\alpha'(s)^2 = 0$$

$c'(\alpha(s))$, $d'(s)$ nenulové, rovnoběžné

$$\Rightarrow \alpha''(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad d''(s) = \underbrace{c''(\alpha(s))}_{\parallel n}\,\alpha'(s)^2$$

$$\Rightarrow d''(s) \parallel n \quad \Rightarrow \quad d \text{ je geodetika}$$

Věta Je-li $d: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ nejkratší spojnice bodů $A = c(a)$, $B = c(b)$ na ploše a $\|d'\| = \text{konst.}$, pak d je geodetika.

Dk sporem, $\exists\, s_0 \in [a,b]$ $d''(s_0)$ není kolmý k ploše

$P = d(s_0)$, W okolí P jako v předch. větě

$\exists\, s_1 > s_0$ $d|_{[s_0,s_1]} \subset W$ $\overset{\text{věta}}{\Rightarrow}$ $d|_{[s_0,s_1]}$ splývá s geodetikou

$\|d'\| = \text{konst.}$ $\overset{\text{lemma}}{\Rightarrow}$ $d|_{[s_0,s_1]}$ je geodetika $\Rightarrow$ $d''(s_0)$ kolmý k ploše