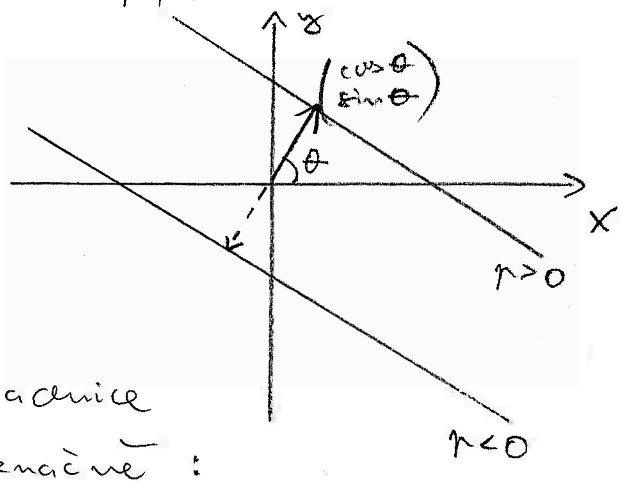
CROFTONŮV VZOREC

Každou přímku v rovině lze popsat rovnicí ve tvaru

$$\underbrace{x\cos\theta + y\sin\theta}_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}} = p, \quad \text{kde} \quad p,\theta\in\mathbb{R}.$$

= orientovaná velikost průmětu vektoru $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ do směru vektoru $\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$



Budeme říkat, že (p,θ) jsou souřadnice dané přímky. Nejsou určeny jednoznačně:

- úhly θ lišící se o celočíselný násobek 2π určují stejnou přímku.
- (p,θ) a $(-p,\theta-\pi)$ jsou souřadnice stejné přímky.

Jak se změní souřadnice přímky při posunutí / otočení kartézské soustavy souřadnic?

Souřadnice bodů ve staré soustavě: (x,y)

v nové soustavě: $(\bar{x},\bar{y})$

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

otočení soustavy kolem počátku o $-\alpha$, poté posun o $\begin{pmatrix}-x_0\\-y_0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}-x_0\\\bar{y}-y_0\end{pmatrix}$$

Rovnice přímky:

$$p = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$p = \cos\theta\left[\cos\alpha\,(\bar{x}-x_0) + \sin\alpha\,(\bar{y}-y_0)\right] + \sin\theta\left[-\sin\alpha\,(\bar{x}-x_0) + \cos\alpha\,(\bar{y}-y_0)\right]$$

$$p = (\bar{x}-x_0)\left[\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha\right] + (\bar{y}-y_0)\left[\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha\right]$$

$$p = (\bar{x}-x_0)\cos(\theta+\alpha) + (\bar{y}-y_0)\sin(\theta+\alpha)$$

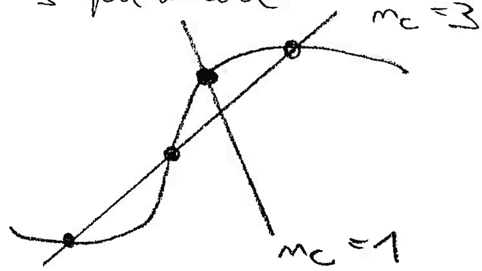
$$\underbrace{p + x_0\cos(\theta+\alpha) + y_0\sin(\theta+\alpha)}_{\bar{p}} = \bar{x}\cos\underbrace{(\theta+\alpha)}_{\bar{\theta}} + \bar{y}\sin\underbrace{(\theta+\alpha)}_{\bar{\theta}}$$

$$= \bar{x}\cos\bar{\theta} + \bar{y}\sin\bar{\theta}$$

Def| Nechť je dána rovinná křivka c. Pak definujme

$n_c(p,\theta)$ = počet průsečíků křivky c s přímkou o souřadnicích (p,θ)

$\in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$



Věta (Croftonův vzorec): Je-li c po částech spojitě diferencovatelná křivka, pak pro její délku l platí

$$l = \frac{1}{2} \iint\limits_{\substack{p\in\mathbb{R}\\ \theta\in(0,\pi)}} n_c(p,\theta)\, dp\, d\theta .$$

Důk| 1) Pravý integrál je invariantní vůči posunutí / otočení kartézské soustavy souřadnic:

$$\left.\begin{aligned} \bar{p} &= p + x_0\cos(\theta+\alpha) + y_0\sin(\theta+\alpha)\\ \bar{\theta} &= \theta+\alpha \end{aligned}\right\} \varphi(p,\theta)$$

$$J\varphi(p,\theta) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar p}{\partial p} & \frac{\partial \bar p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \bar\theta}{\partial p} & \frac{\partial \bar\theta}{\partial \theta}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & - \\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$

$$\iint\limits_{\substack{p\in\mathbb{R}\\ \theta\in(0,\pi)}} n_c(p,\theta)\, dp\, d\theta$$

$$= \iint\limits_{\substack{p\in\mathbb{R}\\ \theta\in(0,\pi)}} \overline{n_c}\left(p+x_0\cos(\theta+\alpha)+y_0\sin(\theta+\alpha),\ \theta+\alpha\right) dp\, d\theta$$

$$= \iint\limits_{\substack{p\in\mathbb{R}\\ \theta\in(0,\pi)}} \overline{n_c}(\varphi(p,\theta))\, \underbrace{|J\varphi(p,\theta)|}_{=1}\, dp\, d\theta$$

$$= \iint\limits_{\substack{\bar p\in\mathbb{R}\\ \bar\theta\in(\alpha,\pi+\alpha)}} \overline{n_c}(\bar p,\bar\theta)\, d\bar p\, d\bar\theta$$

$$= \int\limits_{\bar\theta\in(\alpha,\pi)}\left(\int\limits_{\bar p\in\mathbb{R}} \overline{n_c}(\bar p,\bar\theta)\, d\bar p\right) d\bar\theta + \int\limits_{\bar\theta\in(\pi,\pi+\alpha)}\left(\int\limits_{\bar p\in\mathbb{R}} \underbrace{\overline{n_c}(-\bar p,\bar\theta-\pi)}_{=\overline{n_c}(\bar p,\bar\theta)}\, d\bar p\right) d\bar\theta$$

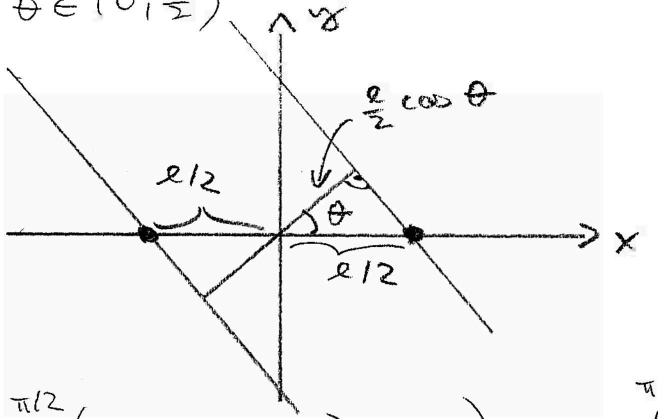
$$= \int\limits_{\bar\theta\in(\alpha,\pi)}\left(\int\limits_{\bar p\in\mathbb{R}} \overline{n_c}(\bar p,\bar\theta)\, d\bar p\right) d\bar\theta + \underbrace{\int\limits_{\bar\theta\in(\pi,\pi+\alpha)}\left(\int\limits_{\bar p\in\mathbb{R}} \overline{n_c}(\bar p,\bar\theta-\pi)\, d\bar p\right) d\bar\theta}_{=\int\limits_{\bar\theta\in(0,\alpha)}\left(\int\limits_{\bar p\in\mathbb{R}} \overline{n_c}(\bar p,\bar\theta)\, d\bar p\right) d\bar\theta}$$

$$= \int\limits_{\bar\theta\in(0,\pi)}\left(\int\limits_{\bar p\in\mathbb{R}} \overline{n_c}(\bar p,\bar\theta)\, d\bar p\right) d\bar\theta$$

2) Tvrzení platí, pokud c je úsečka délky l.

BÚNO leží na ose x, střed má v $[0,0]$.

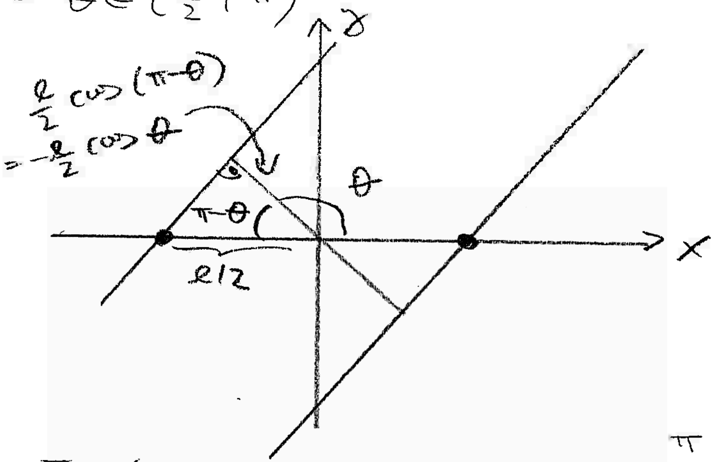
- $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$



$$n_c(p,\theta) = \begin{cases} 1, & p \in [-\frac{l}{2}\cos\theta, \frac{l}{2}\cos\theta] \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_{\mathbb{R}} n_c(p,\theta)\, dp \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} l \cos\theta \, d\theta = l\,[\sin\theta]_0^{\pi/2} = l$$

- $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$



$$n_c(p,\theta) = \begin{cases} 1, & p \in [\frac{l}{2}\cos\theta, -\frac{l}{2}\cos\theta] \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} n_c(p,\theta)\, dp \right) d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} -l \cos\theta \, d\theta = -l\,[\sin\theta]_{\pi/2}^{\pi} = l$$

Celkem $\displaystyle\int_{\substack{p \in \mathbb{R} \\ \theta \in (0,\pi)}} n_c(p,\theta)\, dp\, d\theta = 2l$

Podobně se ověří, že vzorec platí, když c je úsečka bez jednoho či obou krajních bodů.

3) Tvrzení platí, pokud c je lomená čára.

$c = \underbrace{c_1 \cup \dots \cup c_k}_{\text{úsečky}}$ (příp. bez kraj. bodů) o délkách $l_1, \dots, l_k$

$$\frac{1}{2} \iint n_c = \frac{1}{2} \iint n_{c_1} + \dots + n_{c_k} = l_1 + \dots + l_k = l$$

4) Každou po částech spojitě diferencovatelnou křivku lze libovolně přesně aproximovat lomenou čarou.

<u>Pozn.</u> (ekvivalentní podoba vzorce)

$$l = \frac{1}{4} \iint_{\substack{p \in \mathbb{R} \\ \theta \in (0, 2\pi)}} n_c(p,\theta)\, dp\, d\theta$$

Aplikace Croftonova vzorce

1) odhad délky pro křivky zadané graficky (neznáme předpis)

$$l = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\pi} n_c(p,\theta)\, d\theta \right) dp \doteq \frac{1}{2} \sum_{i,j} n_c(p_i,\theta_j)(p_{i+1}-p_i)(\theta_{j+1}-\theta_j)$$

ekvidistantní dělení: $p_i = i\,\Delta p, \; i \in \mathbb{Z}$

$\theta_j = j\,\Delta\theta, \; j \in \{0, \dots, \frac{\pi}{\Delta\theta}\}$

$$l \doteq \frac{1}{2}\, \Delta p\, \Delta\theta \sum_{i,j} n_c(p_i,\theta_j)$$

← celkový počet průsečíků s danou soustavou přímek

Example. Figure 1-34 is a drawing of an electron micrograph of a circular DNA molecule and we want to estimate its length. The four families

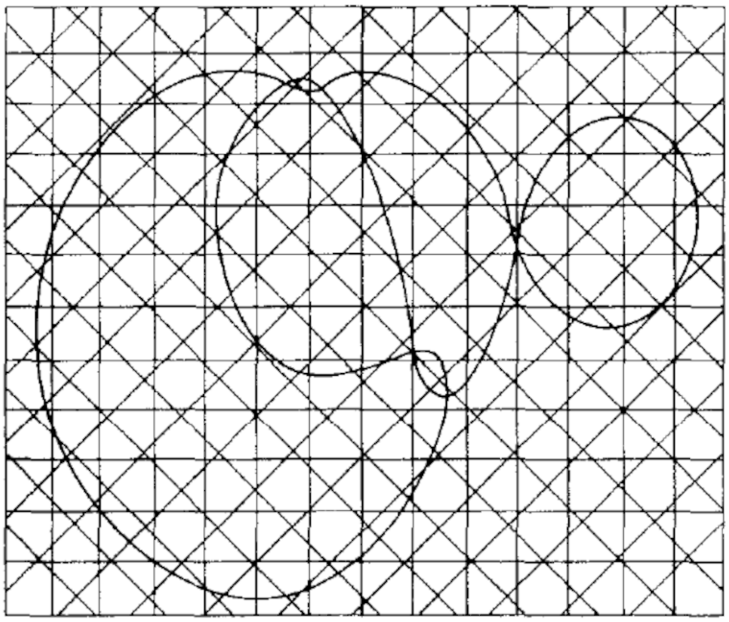


Figure 1-34. Reproduced from H. Ris and B. C. Chandler, *Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol.* 28, 2 (1963), with permission.

of straight lines at a distance of 7 millimeters and angles of $\pi/4$ are drawn over the picture (a more practical way would be to have this family drawn once and for all on transparent paper). The number of interesection points is found to be 153. Thus,

$$\frac{1}{2} n \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} 153 \frac{3.14}{4} \sim 60.$$

Since the reference line in the picture represents 1 micrometer ($= 10^{-6}$ meter) and measures, in our scale, 25 millimeters, $r = \frac{25}{7}$, and thus the length of this DNA molecule, from our values, is approximately

$$60\left(\frac{25}{7}\right) \sim 16.6 \text{ micrometers.}$$

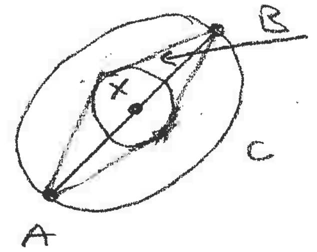
The actual value is 16.3 micrometers.

2) Studium uzavřených konvexních křivek

<u>def</u>| jednoduchá uzavřená křivka je konvexní, pokud její vnitřek je konvexní množina.

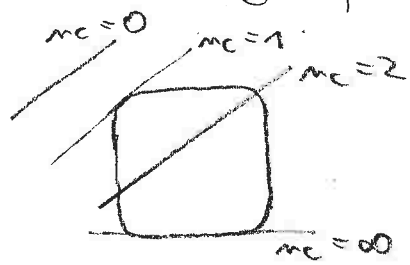
<u>Lemma</u>| nechť c je konvexní křivka a A, B dva různé body ležící na c. Pak buď všechny body úsečky AB leží na c, nebo všechny kromě A, B leží ve vnitřku c.

<u>Dk</u>| nechť úsečka AB obsahuje aspoň 1 bod X ležící uvnitř c.



$K = c \cup$ vnitřek c ... konvexní množina, $\partial K = c$

všechny body ležící zde jsou vnitřní body K, tedy leží ve vnitřku c.



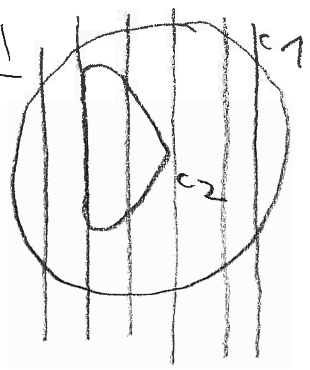
<u>Důsledek</u>| je-li c konvexní křivka, pak

$n_c(p, \theta) \in \{0, 1, 2, \infty\} \quad \forall p, \theta \in \mathbb{R}$.

(Použij lemma, za A, B vezmi krajní body průniku K s přímkou o souřadnicích (p, θ).)

<u>Věta</u> (délka křivky uvnitř křivky): jsou-li c_1, c_2 jednoduché uzavřené křivky, c_2 leží uvnitř c_1 a je konvexní, pak délka $c_1 \geq$ délka c_2.

<u>Dk</u>|

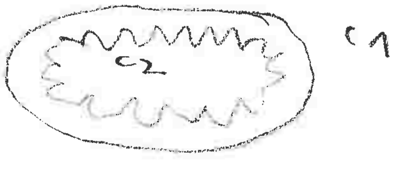


$\forall p \in \mathbb{R} \quad \forall \theta \in [0, \pi)$ platí $n_{c_1}(p, \theta) \geq n_{c_2}(p, \theta)$ s výjimkou případů, kdy $n_{c_2}(p, \theta) = \infty$.

ale $n_{c_2}(p, \theta) < \infty$ pro s. v. $p \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, \pi)$ (integrál v Croftonově vzorci konverguje), tj. $n_{c_2} \leq n_{c_1}$ s. v.

$\Rightarrow$ délka $c_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} n_{c_1}(p, \theta) \, dp \, d\theta \geq \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} n_{c_2}(p, \theta) =$ délka c_2.

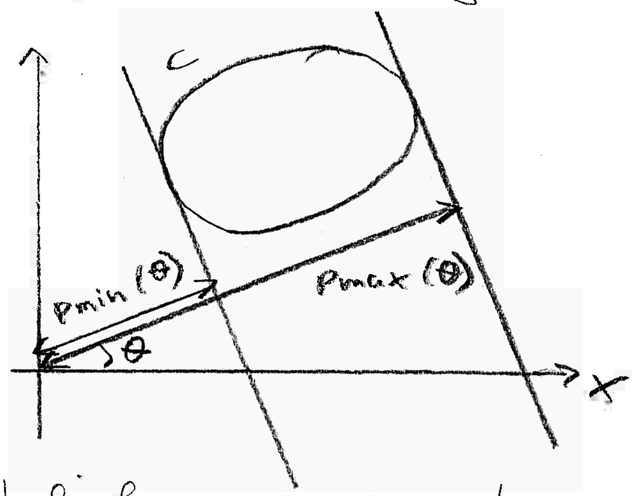
<u>Pozn</u>| Pro nekonvexní c_2 tvrzení obecně neplatí.



def| Nechť c je konvexní křivka. $\forall \theta \in [0,\pi)$ položme

$$p_{max}(\theta) = \max\{p \in \mathbb{R} : \text{přímka } (p,\theta) \text{ protíná } c\},$$
$$p_{min}(\theta) = \min\{ \quad \text{—— '' ——} \quad \}.$$

Hodnota $p_{max}(\theta) - p_{min}(\theta)$ se nazývá šířka křivky ve směru θ.

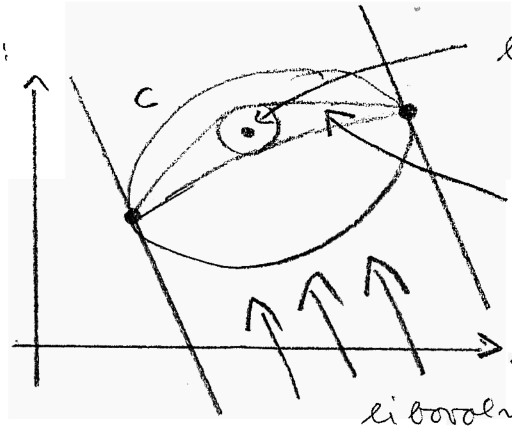


Křivka c má konstantní šířku d, pokud $\forall \theta \in [0,\pi)$
$$p_{max}(\theta) - p_{min}(\theta) = d.$$

Věta (Barbierova): každá konvexní křivka s konstantní šířkou d má délku πd.

Dk| $\forall \theta \in [0,\pi)$
$$n_c(p,\theta) = \begin{cases} 2, & p \in (p_{min}(\theta), p_{max}(\theta)) \\ 0, & p \in \mathbb{R} \setminus [p_{min}(\theta), p_{max}(\theta)] \end{cases}$$

vysvětlení:



libovolný vnitřní bod

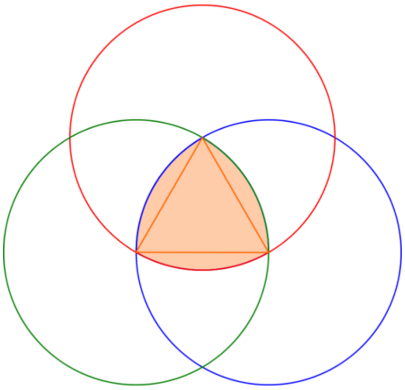
zde jsou samé vnitřní body

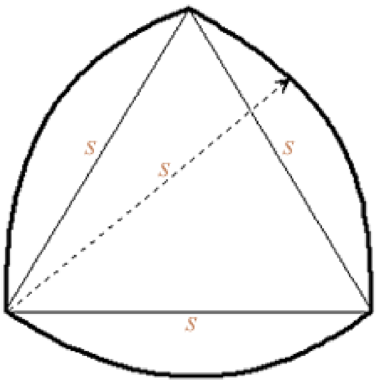
libovolná přímka obsahující body uvnitř c $\overset{\text{lemma}}{\Longrightarrow}$ protíná c jen ve 2 bodech

$$\text{délka } c = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \int_{\mathbb{R}} n_c(p,\theta)\, dp\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 2\,(\underbrace{p_{max}(\theta) - p_{min}(\theta)}_{d})\, d\theta = \pi d$$

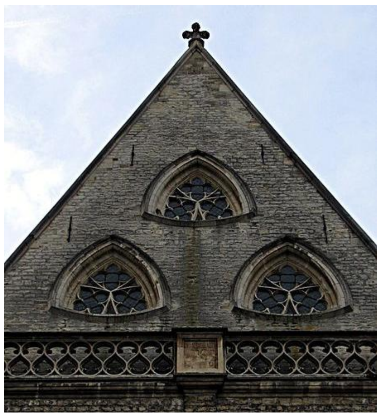
Křivky s konstantní šířkou

Reuleauxův trojúhelník je tvořen třemi oblouky kružnic sestrojenými nad stranami rovnostranného trojúhelníku o straně délky s (střed každé kružnice je v protějším vrcholu). Jde o křivku s konstantní šířkou s.

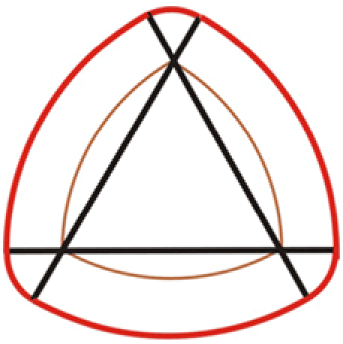




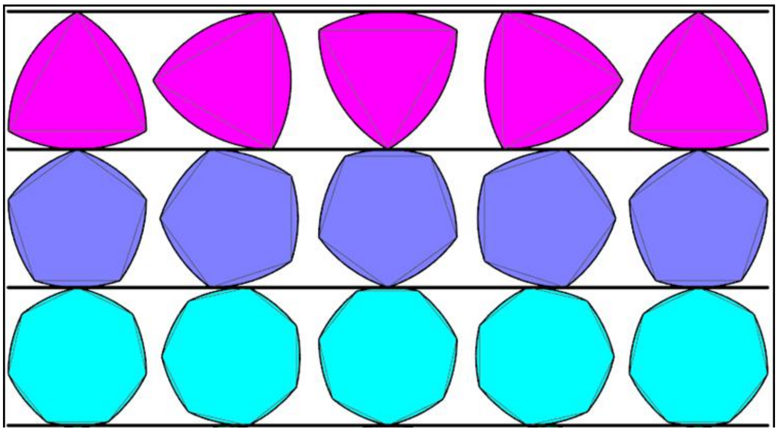
Reuleauxův trojúhelník v gotické architektuře (Bruggy, Gent)



Varianta Reuleauxova trojúhelníku se zaoblenými rohy: Volíme číslo $e > 0$, sestrojujeme tři dvojice oblouků o poloměrech $s + e$, e se středy ve vrcholech trojúhelníku. Výsledná křivka má konstantní šířku $s + 2e$.



Místo trojúhelníku lze začít s pravidelným n-úhelníkem, kde n je liché.



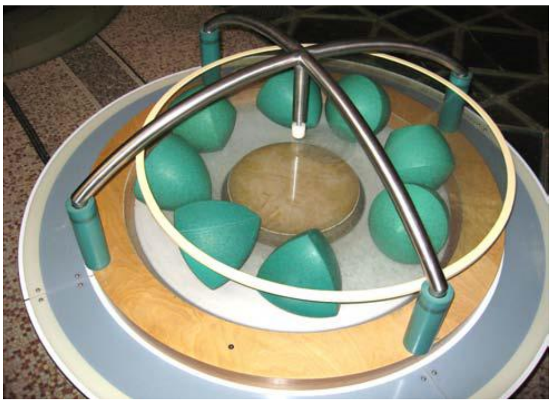
Britské mince: 20 pencí a 50 pencí ($n = 7$); poklop kanalizace v San Francisku ($n = 3$)

Věta (Blaschke, Lebesgue). Reuleauxův trojúhelník má ze všech křivek s předepsanou konstantní šířkou nejmenší obsah.

Tělesa s konstantní šířkou

Není pravda, že všechna tělesa s konstantní šířkou mají stejný povrch/objem.
Nalezení tělesa se zadanou konstantní šířkou, které má nejmenší objem, je otevřený problém.

Tělesa s konstantní šířkou v muzeu vědy Palais de la découverte, Paříž



3) Buffonova úloha o jehle a její varianty

- v rovině je nakreslená síť rovnoběžných přímek o vzdálenosti $d>0$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla délky $\ell<d$, která spadne na náhodné místo v rovině, protne nějakou přímku?

- Ekvivalentní úloha: jehla leží na ose x, střed v $[0,0]$, házíme sítí rovnoběžných přímek. Přímka, která dopadne nejblíže k počátku, má souřadnice $p\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$, $\theta\in[0,\pi)$. Pokud jehla protne nějakou přímku, bude to tato.

$\Omega = \{(p,\theta) : p\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}),\ \theta\in[0,\pi)\}$ (všechny případy)

$A = \{(p,\theta) : \text{přímka } (p,\theta) \text{ protíná jehlu}\}$ (příznivé případy)

$$P(\text{jehla protne přímku}) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(X)} = \frac{\lambda(A)}{\pi d}$$

$$\lambda(A) = \iint_{\substack{p\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2})\\ \theta\in[0,\pi)}} \chi_A(p,\theta)\,dp\,d\theta = \iint_{\substack{p\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2})\\ \theta\in[0,\pi)}} n_C(p,\theta)\,dp\,d\theta = 2\ell \quad \text{(Crofton)}$$

Pokud C je úsečka reprezentující jehlu a $\theta\neq 0$, pak $\chi_A(p,\theta) = n_C(p,\theta)$ (Pokud jehla protne přímku, pak průsečík je právě jeden.)

$$\Rightarrow P(\text{jehla protne přímku}) = \frac{2\ell}{\pi d}$$

- Lze odvodit i elementárně, ale s Croftonovým vzorcem lze úlohu zobecnit:

Házíme-li křivkou délky $\ell<d$, pak

$$\frac{1}{\pi d}\iint_{\substack{p\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2})\\ \theta\in[0,\pi)}} n_C(p,\theta)\,dp\,d\theta = \frac{2\ell}{\pi d}$$ je střední hodnota počtu průsečíků.

(„Buffon noodle problem")

Je-li C uzavřená konvexní křivka délky ℓ, pak

$$\frac{2\ell}{\pi d} = E(\text{počet průsečíků}) = 0\cdot P(0 \text{ průsečíků}) + 2\cdot P(2 \text{ průsečíky}),$$

protože jiné počty průsečíků mají pravděpodobnost 0.

$$\Rightarrow P(\text{křivka protne přímku}) = P(2 \text{ průsečíky}) = \frac{\ell}{\pi d}$$

- Historie:

1777 hrabě de Buffon, úloha o jehle (společenská hra, házení tyčky na podlahu s parketami)

1812 Laplace navrhuje možnost experimentálního měření π

1850 Wolf (Curych), 5000 hodů, $\pi \doteq 3{,}1596$

1855 Smith (Skotsko), 3204 hodů, $\pi \doteq 3{,}1553$

2. pol. 19. st.: Pokusy o řešení úlohy pro jiné útvary, nalezení střední hodnoty počtu průsečíků (Barbier, Crofton)