

Diferenciální geometrie – požadavky ke zkoušce (ZS 2024/25)

1. Křivky v rovině a v prostoru

Parametrizovaná křivka (definice, příklady). Regulární křivky, tečna, normála, odchylka křivek, délka křivky. Archimédova spirála (definice a parametrizace), logaritmická spirála (parametrizace). Ekvivalence křivek. Parametrizace obloukem, existence této parametrizace pro regulární křivky (důkaz). Frenetův repér rovinné křivky. Frenetovy vzorce a křivost rovinné křivky, geometrický význam křivosti (všechna tvrzení s důkazy). Frenetův repér a křivost křivky při změně parametrizace (důkaz). Nalezení křivky s předepsanou křivostí (včetně zdůvodnění správnosti postupu a diskuse o integračních konstantách), Eulerova spirála (definice pomocí křivosti, parametrizace). Oskulační kružnice, střed křivosti a poloměr křivosti. Střed křivosti jako limita průsečíků normál (důkaz). Evoluta rovinné křivky. Cykloida (definice, odvození parametrizace). Evolventa rovinné křivky, její geometrický význam a vztah k evolutě (všechna tvrzení s důkazy). Řetězovka (fyzikální význam a parametrizace, bez odvození), traktrix (definice a odvození diferenciální rovnice, rovnici není potřeba umět vyřešit).

Prostorové křivky: obecná křivka, Frenetův repér (definice a myšlenka, jak se k ní dojde), hlavní normála, binormála, Frenetovy vzorce (důkaz), křivost a torze a jejich geometrický význam (důkaz), charakterizace křivek s nulovou torzí (důkaz), chování při změně parametrizace (bez důkazu). Existence křivky s předepsanou křivostí a torzí (bez důkazu). Šroubovice (parametrizace). Oskulační rovina, křivost průmětu do oskulační roviny (bez důkazu).

2. Plochy v prostoru

Parametrizovaná plocha, příklady: rotační plochy (parametrizace a příklady), válcová plocha kolem křivky (parametrizace), přímkové plochy (parametrizace válcové a kuželové plochy). Křivky na ploše. Regulární plochy, tečná rovina, tečný prostor, normála. Ekvivalence ploch, tečná rovina a normála při změně parametrizace (důkaz). První základní forma plochy a její použití (délka křivky na ploše, skalární součin tečných vektorů, regularita plochy – vše s důkazy). Zobrazení mezi plochami: izometrie, konformní zobrazení (kritéria s důkazy). Příklady: kruhová inverze (odvození předpisu), stereografická projekce (odvození předpisu), Mercatorova projekce (odvození diferenciální rovnice, rovnici není potřeba umět vyřešit). Druhá základní forma plochy, její použití k výpočtu křivosti křivky na ploše a důsledky: křivost normálového řezu, Meusnierova věta (všechna tvrzení s důkazy). Normálová křivost (definice a geometrický význam). Hlavní směry a hlavní křivosti (definice, odvození nutných podmínek pro hlavní křivosti a směry), věta o kolmosti hlavních směrů a Eulerův vzorec (bez důkazu). Gaussova a střední křivost, jejich výpočet pomocí 1. a 2. formy (důkaz). Weingartenovy a Gaussovy rovnice (bez důkazu), Theorema egregium (bez důkazu). Geodetické křivky, kritérium pro geodetiky vznikající jako průnik plochy a roviny (bez důkazu), diferenciální rovnice pro geodetiky (odvození), existence a jednoznačnost geodetiky pro předepsaný bod a směr (bez důkazu), příklady geodetik (v rovině, na válci, na sféře).

Bez znalosti definic a schopnosti je ilustrovat na příkladech nelze úspěšně složit zkoušku. Důkazům je nutné rozumět, tj. umět odůvodnit jednotlivé kroky (nikoliv je pouze znát z paměti).