Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 10, verze ze dne 6. prosince 2022

10 Afinní a projektivní prostor

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se pracovat v projektivním rozšíření afinní roviny.
- Za DU je Úloha 10.6.

Příklady:

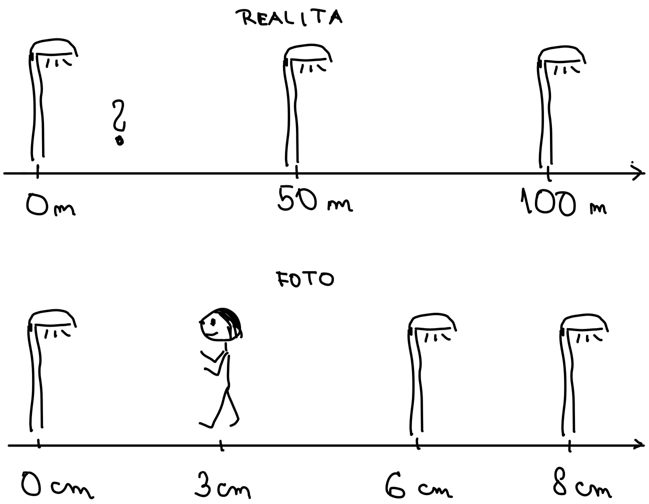
Úloha 10.1. V $\mathbb{R}^2$ jsou dány body $A = [1, 2]$, $B[3, 4]$ a přímka p parametrizací $p(t) = [-5, -11] + t(1, -2)$. Nalezněte nevlastní body přímek $\overleftrightarrow{AB}$ a p a určete průsečík těchto přímek.

Řešení. Nevlastní bod $\overleftrightarrow{AB}$: $(1, 1, 0)$, nevlastní bod p: $(1, -2, 0)$, průsečík: bod $(22, 19, -3)$, resp. $[-\frac{22}{3}, -\frac{19}{3}]$.

Úloha 10.2. V $\mathbb{R}^2$ jsou dány body $A = [1, 3]$, $B[-1, 7]$. Nalezněte na úsečce AB bod X tak, aby pro dělící poměr platilo $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{4}$. Nalezněte nevlastní bod přímky $\overleftrightarrow{AB}$ a označte si ho Y. Vypočtěte dvojpoměr (A, B, X, Y).

Řešení. $X = \frac{4}{5}A + \frac{1}{5}B = [\frac{3}{5}, \frac{19}{5}]$, $Y = (1, -2, 0)$, $(A, B, X, Y) = -\frac{1}{4}$.

Úloha 10.3. Na fotografii (kterou považujeme za projektivně zobrazenou realitu) rovné ulice vidíme tři pouliční lampy a jednoho chodce. Víme, že rozestup lamp v realitě je rovnoměrný, a to 50 metrů. Na fotografii je vzdálenost prvních dvou lamp 6 centimetrů a vzdálenost druhé a třetí lampy 2 centimetry. Chodec je na fotografii přesně uprostřed mezi první a druhou lampou. Jak je od první lampy vzdálen v realitě?



Řešení. $\frac{150}{9} \approx 16.67$.

Úloha 10.4. Nalezněte projektivní transformaci projktivně rozšířené afinní přímky $\mathbb{R}$, která zobrazuje $0 \to 0$, $1 \to 1$ a $\frac{1}{3} \to \frac{1}{2}$. Ukažte, že zúžené na $[0,1]$ je toto zobrazení difeomorfismem tohoto intervalu na sebe. Srovnejte s úlohou 3.1.(3).

Řešení. $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, kořen jmenovatele je mimo $[0,1]$, funkce je na tomto intervalu hladná a rostoucí.

Úloha 10.5. V $\mathbb{R}^2$ určete afinní typ kuželosečky $x^2 - 2xy + 4x - 6y + y^2 + 7 = 0$ a nelezněte tečnu jejím bodě $[1,2]$.

Řešení. Parabola (jeden bod v nekonečnu: $(1,1,0)$), tečna: $x - 2y + 3 = 0$.

Úloha 10.6. Je dána afiiní kuželosečka $\tilde{Q}$ s rovnicí

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 - 4x - 28y - 16 = 0.$$

a) Ukažte, že $\tilde{Q}$ je regulární kuželosečka.

b) Určete její afinní typ.

c) Určete tečny k $\tilde{Q}$ z bodu $[-1,-1]$.

d) Nalezněte její střed a asymptoty $\tilde{Q}$, jestliže existují.

e) Nalezněte její osy, vrcholy a délky poloos.

f) Nalezněte nějakou parametrizaci $\tilde{Q}$ a ukažte, že všechny vrcholy jsou body s nejmenší či největší znaménkovou křivostí.