Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 9, verze ze dne 1. prosince 2021

9 Projektivní prostor a zobrazení

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se pracovat v projektivních prostorech a používat homogenní souřadnice.
- Seznámit se s konečnými projektivními rovinami.
- Naučit se pracovat s projektivními transformacemi.
- Studovat projektivní kuželosečky a polaritu.
- Poslední DU bude zadán na příštím cvičení.

Příklady:

Úloha 9.1 (Reálná rovina)**.** Uvažujme projektivní rovinu $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ a v ní body $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (1, 1, 1)$.

a) Ukažte, že tyto body leží na projektivní přímce, najděte její parametrizaci a duální homogenní souřadnice.

b) Nalezněte průsečík D přímky $\overleftrightarrow{AB}$ s přímkou $(1, 2, -5)^*$ a vypočítejte dvojpoměr $\mu = (A, B, C, D)$.

c) Vypočítejte dvojpoměr pro různé permutace, např. (A, B, D, C), (B, A, C, D), (C, B, A, D) a zamyslete se jak výsledky souvisejí s μ.

d) Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ nalezněte bod E tak, aby $(A, B, C, E) = -1$ (a tedy body tvořily harmonickou čtveřici).

Řešení.

a) Parametrizace $\overleftrightarrow{AB}$: např. $t_1(1, 2, 3) + t_2(3, 2, 1)$. Duální souřadnice $\overleftrightarrow{AB} = (1, -2, 1)^*$.

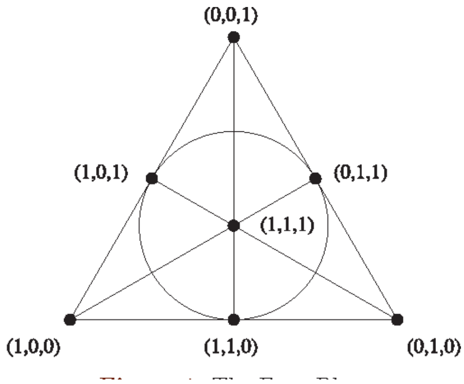
b) $D = (4, 3, 2)$, $\mu = \frac{1}{5}$.

c)

d) $E = (1, 0, -1)$.

Úloha 9.2 (Konečné geometrie)**.** Studujme projektivní roviny $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{Z}_p^3)$, kde p je pevně zvolené prvočíslo.

a) Ověřte, že následující obrázek tak zvané Fanovy roviny (Fano plane) popisuje všechny body a přímky v rovině $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_2^3)$. Spočítejte duální homogenní souřadnice všech sedmi přímek.



b) Nakreslete všechny body a přímky projektivní roviny $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_3^3)$.

c) Určete kolik má bodů a kolik přímek projektivní rovina $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_p^3)$. Kolik na každé přímce leží bodů a kolik přímek prochází každým bodem?

d) Uvažujme projektivní rovinu $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_5^3)$ a v ní dva body $A = (1,2,3)$ a $B = (3,1,2)$. Vypište všechny body, které leží na přímce $\overleftrightarrow{AB}$. Nalezněte její průsečík s přímkou $p = (1,1,0)^*$.

Řešení.

a)

b)

c) Celkem má rovina $p^2 + p + 1$ bodů a stejný počet přímek. Na každé přímce leží $p + 1$ bodů a každým bodem prochází $p + 1$ přímek.

d) $\overleftrightarrow{AB} = \{(1,2,3), (4,3,0), (2,4,2), (0,0,4), (3,1,1), (3,1,2)\}$. Průsečík je $(0,0,4)$. Souřadnice bodů jsou homogenní (až na násobek číslem ze $\mathbb{Z}_5$).

Úloha 9.3 (Projektivní transformace)**.** Nalezněte projektivní transformaci F přímky $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ na sebe, která splňuje

$$F(1,0) = (1,3), \quad F(2,3) = (4,9), \quad F(2,1) = (2,5).$$

Hint: souřadnice fungují až na násobek.

Řešení. Zobrazení je v homogenních souřadnicích dáno maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a jejím libovolným násobkem).

Úloha 9.4 (Projektivní transformace)**.** Nalezněte projektivní transformaci F roviny $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ na sebe, která splňuje

$$F(1,0,0) = (1,0,2), \quad F(0,1,0) = (0,1,-1), \quad F(0,0,1) = (1,1,2), \quad F(2,1,1) = (8,1,17).$$

Řešení. Zobrazení je v homogenních souřadnicích dáno maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a jejím libovolným násobkem).

Úloha 9.5. V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je dána množina rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

$$Q : 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 5x_3^2 = 0.$$

Ukažte, že Q je regulární kuželosečka a nalezněte k ní tečnu v jejím bodě $(2,0,2)$. Nalezněte projektivní transformaci, která zobrazuje kanonickou kuželosečku $K : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ na Q.

Řešení. Matice kvadratické formy

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

má signaturu $(2,1,0)$. Rovnice tečny je $5x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$, její duální souřadnice tedy jsou $(5,1,-5)^*$. Projektivních transformací je více, například ta daná maticí

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Musí platit $P^T.B.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Úloha 9.6. V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je dána kuželosečka rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

$$Q : 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 - 3x_3^2 = 0.$$

a) Ukažte, že se jedná o regulární reálnou kuželosečku.

b) Nalezněte poláru p_X k bodu $X = (3,4,1)$.

c) Nalezněte tečny ke Q procházející bodem X.

d) Ukažte, že bod X leží na přímce $r = (1, 1, -7)^*$. Vypočtěte $Y = r \cap p_X$ a oba průsečíky $r \cap Q$, které si označte A, B.

e) Ukažte, že (X, Y, A, B) tvoří harmonickou čtveřici.

Řešení.

a) Signatura matice $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ je $(2, 1, 0)$. Jen tak mimochodem $(1, 2, 0)$ by nám taky vyhovovalo protože bychom si místo B vzali $-B$, které definuje stejnou kuželosečku.

b) $p_X = (-3, 1, 6)^*$

c) Jde o přímky $7x_1 - 2x_2 - 13x_3 = 0$, $x_1 - 3x_3 = 0$.

d) $Y = (13, 15, 4)$, $A = (4, 3, 1)$, $B = (22, 27, 7)$.

e)

Úloha 9.7. V reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je dána kvadrika rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

$$2x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 3x_2^2 - 2x_4^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 = 0.$$

Ověřte, že tato kvadrika je regulární a rozhodněte, zda-li je přímková či nikoliv. Nalezněte tečnou rovinu v jejím bodě $(3, -2, 2, -1)$. Nalezněte průnik této tečné roviny s kvadrikou.

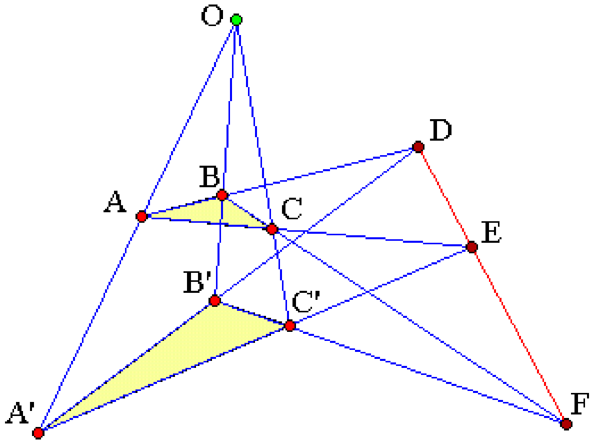
Řešení. Jedná se o regulární přímkovou kvadriku. Tečná rovina má rovnici $x_2 - 2x_4 = 0$ a tedy duální souřadnice $(0, 1, 0, -2)^*$. Průnik je sjednocení dvou přímek, které je možno homogenně parametrizovat například jako

$$\begin{aligned} p_1: &\qquad t_1(3, -2, 2, -1) + t_2(-3, 2, 1, 1) \\ p_2: &\qquad t_1(3, -2, 2, -1) + t_2(1, 2, 2, 1) \end{aligned}$$

Úloha 9.8 (Desarguesova věta)**.** V projektivní reálné rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme šest různých bodů A, B, C, A', B', C' přičemž $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ se protínají v jednom bodě. Pak body

$$D := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}, \quad E := \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}, \quad F := \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$$

leží na přímce.



a) Dokažte!

b) Formulujte duální větu.

c) Přiměřeně si lámejte hlavu nad tím, že pokud tento obrázek interpretujeme jako zobrazení prostorové situace, kdy máme dva (žluté) řezy jehlanu rovinami, pak přímka DEF je průsečnicí těchto rovin a kolinearita bodů D, E, F je zřejmá.