

# Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 8, verze ze dne 27. listopadu 2021

## 8 Afinní prostor a zobrazení

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se pracovat s afinními zobrazeními
- Naučit se používat barycentrické souřadnice v rovině

Příklady:

**Úloha 8.1.** Určete rovnice afinního zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do sebe, ve kterém bod  $M[0, 1]$  přechází do bodu  $M'[-3, 3]$  a asociovaný homomorfismus zobrazuje vektory  $\mathbf{u}(1, 2)$  a  $\mathbf{v}(1, 0)$  po řadě na vektory  $\mathbf{u}'(-7, -2)$ ,  $\mathbf{v}'(1, -2)$ .

**Řešení.**  $x' = x - 4y + 1$ ,  $y' = -2x + 3$

**Úloha 8.2.** Určete afinní zobrazení  $f$  z  $\mathbb{R}^2$  do sebe tak, aby  $f([-1, 1]) = [6, 7]$ ,  $f([1, -1]) = [4, 5]$  a  $f([2, 0]) = [7, 12]$ . Určete zda-li se jedná o afinitu a případně nalezněte zobrazení inverzní.

**Řešení.**  $f \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$   
 $f^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -9/2 \end{pmatrix}$

**Úloha 8.3.** Určete obraz bodu  $[3, 1, -2] \in \mathbb{R}^3$  při afinním zobrazení  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  splňujícím  $f([2, 1, -1]) = [1, 3]$ ,  $f([1, 0, 2]) = [0, 2]$ ,  $f([0, 1, 1]) = [1, -1]$ ,  $f([1, 1, 1]) = [1, 1]$  a obraz vektoru  $(3, 1, -2)^T$  při asociovaném homomorfismu  $\bar{f}$ .

**Řešení.**  $[1, 5]$  a  $(1, 5)^T$ .

**Úloha 8.4.** Lineární zobrazení  $\bar{f}$  asociované s afinním zobrazením  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  má vzhledem k bázi  $B$  matici  $A$ . Navíc platí  $f([1, 2]) = [5, -8]$ . Určete  $f([3, 4])$ .

$$B = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right), A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Řešení.**  $f([3, 4]) = [5, -8] + (-12, -16) = [-7, -24]$

**Úloha 8.5.** Vyjádřete kolmou projekci  $\pi$  celého  $\mathbb{R}^2$  na přímku  $x + 2y + 3 = 0$  a ověřte, že  $\pi \circ \pi = \pi$ .

**Řešení.**  $\pi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

**Úloha 8.6.** V afinní rovině  $\mathbb{Z}_5^2$  jsou dány body  $A = [2, 3]$ ,  $B = [1, 4]$ . Nalezněte rovnoběžku s přímkou  $AB$ , která prochází bodem  $C = [2, 2]$  a popište ji parametricky i rovnicově.

**Řešení.** Parametricky:  $[2, 2] + s(4, 1)^T$ , rovnicově:  $x + y = 4$ .

**Úloha 8.7.** Na reálné afinní přímce jsou dva různé body  $A, B$ . Definujme  $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$  a  $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ . Vyjádřete dělicí poměry  $\frac{AT}{TB}$ ,  $\frac{TA}{AB}$ ,  $\frac{ST}{TB}$ . Vyjádřete bod  $S$  jako afinní kombinaci bodů  $A$  a  $T$ .

**Řešení.**  $\frac{AT}{TB} = 2$ ,  $\frac{TA}{AB} = -\frac{2}{3}$ ,  $\frac{ST}{TB} = \frac{1}{2}$ ,  $S = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}T$

**Úloha 8.8.** V  $\mathbb{R}^2$  je dán trojúhelník  $ABC$  s vrcholy  $A[2, 0]$ ,  $B[-3, 0]$  a  $C[3, -3]$ . Ukažte, že body  $P[-1, -1]$ ,  $Q[1, 3]$ , a  $R[-\frac{1}{2}, 0]$  leží postupně na přímkách  $BC$ ,  $CA$  a  $AB$  a určete v jakém poměru je rozdělují. Rozhodněte, zda body  $P, Q, R$  leží na přímce.

**Úloha 8.9.** V  $\mathbb{R}^2$  je nějaký trojúhelník  $ABC$  a dále je  $S$  střed strany  $AB$  a bod  $T$  leží v jedné pětinaš strany  $AC$ . Označme si  $P$  průsečík přímek  $CS$  a  $BT$ . V jakém poměru dělí bod  $P$  úsečky  $CS$  a  $BT$ ? Jaký je poměr obsahů trojúhelníku  $ABC$  a  $PBC$ ?

**Úloha 8.10.** (\*\*) V  $\mathbb{R}^2$  je nějaký trojúhelník  $ABC$  a bod  $X$ , který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Označme si  $P = AX \cap BC$ ,  $Q = BX \cap CA$  a  $R = CX \cap AB$ . Dokažte, že platí

$$\frac{AX}{XP} = \frac{AR}{RB} + \frac{AQ}{QC}.$$