

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Verze ze dne 28. listopadu 2022

7 Afinní prostory

Cíle cvičení:

- Procvičit počítání se souřadnicemi afinního prostoru,
- naučit se pracovat s afinními kombinacemi a barycentrickou soustavou souřadnic.
- přecházet mezi různými popisy afinního podprostoru,
- procvičit určování vzájemné polohy a vzdálenosti afinních podprostorů.

Řešené příklady:

Úloha 7.1. Uvažujme dvě posloupnosti $S = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a $R = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ v \mathbb{R}^2 .

- Ověřte, že se jedná o souřadné soustavy afinního prostoru \mathbb{R}^2 ,
- spočítejte souřadnice bodu $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické souřadné soustavě a vzhledem k soustavě souřadnic S ,
- najděte bod c , pro který $[c]_S = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$,
- pro bod a afinního prostoru najděte $[a]_S$, jestliže $[a]_R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- obecněji, pro bod a afinního prostoru najděte $[a]_S = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, jestliže $[a]_R = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Řešení. (a) Stačí ověřit, zda dvojice $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a dvojice $N = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ tvoří báze vektorového prostoru \mathbb{R}^2 , což zjevně platí.

(b) Pro kanonickou souřadnou soustavou K s počátkem v bodě $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a s kanonickou bází vektorového prostoru zaměření není co počítat, tedy $[b]_K = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dále hledáme souřadnice vektoru $b - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi M , tedy řešíme soustavu s maticí $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$. Standardním postupem

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

snadno zjistíme $[b]_S = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_M = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(c) Postupujeme přímo podle definice. Tedy $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(d) Pro výpočet změny souřadnic použijeme tvrzení z přednášky, které říká, že

$$[a]_S = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_S + [\text{Id}]_M^N [a]_R.$$

Potřebujeme tedy určit $[\text{Id}]_M^N$ a souřadnice $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_M - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}_M$. Najdeme-li matici přechodu

$$[\text{Id}]_M^N = [\text{Id}]_M^{K_2} \cdot [\text{Id}]_{K_2}^N = ([\text{Id}]_{K_2}^M)^{-1} \cdot [\text{Id}]_{K_2}^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

můžeme snadno dopočítat $[a]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_S + [\text{Id}]_M^N [a]_R = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(e) Máme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_S + [\text{Id}]_M^N [a]_R = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2 + 2x \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 7.2. Mějme afinní prostor \mathbb{R}^2 nad tělesem \mathbb{R} s vektorovým prostorem \mathbb{R}^2 a $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Spočítejte afinní kombinaci bodů $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(b) rozhodněte, zda je bod b afinní kombinací bodů $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pokud ano, spočítejte ji,

(c) ověřte, že je posloupnost $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ barycentrická soustava souřadnic a určete barycentrické souřadnice $[b]_B$ a $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_B$ (je to bod z B !).

(d) rozhodněte, zda body b a $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ leží v trojúhelníku s vrcholy B ,

(e) spočítejte těžiště trojúhelníku B .

Řešení. (a) Přímochaře spočítáme kombinaci $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(b) Ptáme se, zda existují hodnoty x a y , pro které

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 - x - y) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tedy řešíme vektorovou rovnici

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + y \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Počítáme soustavu rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -2 \\ 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$, jejíž řešení $x = 1$, $y = -3$ jsme spočítali v 7.1(b). Našli jsme afinní kombinaci $b = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) Protože obsahuje posloupnost B 3 body, zbývá ověřit, že každý bod afinního prostoru dostaneme (jednoznačně) jako afinní kombinaci bodů posloupnosti B , což je (dle tvrzení z přednášky) ekvivalentní tomu, že je posloupnost vektorů

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

lineárně nezávislá. To zřejmě platí, navíc jsme to ověřili už v 7.1.

Barycentrické souřadnice $(3, 1, -3)^T$ bodu b jsme určili v úloze (b) a barycentrické souřadnice $(0, 1, 0)^T$ jednoho z bodů $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ barycentrické souřadné soustavy B určíme bez počítání.

(d) Protože bod leží v trojúhelníku určeném body barycentrické souřadné soustavy B , právě když všechny jeho barycentrické souřadnice vzhledem k B leží v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, stačí nám tyto souřadnice zjistit. Pro bod b už je máme určeny v (c), tudíž vidíme, že b v trojúhelníku neleží.

Nyní podobně jako v (b) vyřešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{5}{2} - 2 \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} - 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array} \right),$$

odkud vidíme, že barycentrické souřadnice bodu c jsou $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})^T$, z čehož plyne, že bod c uvnitř trojúhelníku B leží.

(e) Protože nalezení těžiště není ničím jiným než výpočtem afinní kombinace se všemi koeficienty stejnými, máme $t_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. \square

Úloha 7.3. V eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem uvažujme přímky $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

a $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Určete vzájemnou polohu přímek P a Q ,
- určete úhel přímek P a Q ,
- najděte přímku různoběžnou a zároveň kolmou na obě přímky P a Q ,
- spočítejte vzdálenost P a Q .

Řešení. (a) Afinní přímky P a Q zřejmě nejsou rovnoběžné, stačí nám tedy například zjistit, zda existuje řešení rovnice

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní vektorové podmínce, zda $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Snadno spočítáme, že

nehomogenní soustava $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 10 \end{array} \right)$ nemá řešení, a proto jsou P a Q mimoběžky.

(b) Přímky svírají úhel φ daný směrem jejich zaměřeními $\mathbf{v}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v}_q = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q|}{\|\mathbf{v}_p\| \cdot \|\mathbf{v}_q\|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{18}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(c) Nejprve počítáme vektor kolmý na vektory \mathbf{v}_p a \mathbf{v}_q a budeme tak znát zaměření hledané přímky. Snadno zjistíme (například vyřešením homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tvořenou řádkovými vektory \mathbf{v}_p^T a \mathbf{v}_q^T , že hledaným zaměřením je podprostor $\text{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$. Nyní potřebujeme najít průsečíky hledané kolmé přímky s mimoběžkami P a Q , což lze zformulovat jako řešení rovnice

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ta vede na nehomogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

jejíž jediné řešení je $x = -2$, $y = -1$ a $z = 1$. Všimněme si, že podmínka $z = 1$ říká, že se jednalo o mimoběžky (zjevně nejsou rovnoběžné a to, že se protínají je ekvivalentní podmínce $z = 0$). Tedy průsečík hledané kolmé přímky s přímkou

P je právě bod $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ a průsečík s přímkou Q je právě bod $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Hledanou

kolmou příčkou můžeme napsat ve tvaru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$.

(d) Už jsme našli průsečíky P a Q s kolmou příčkou, nejkratší vzdálenost přímek P a Q je přitom rovna právě vzdálenosti těchto dvou průsečíků. Navíc z vektorové rovnice úlohy (c) vidíme, že tato vzdálenost je rovna právě velikosti vektoru $z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Tedy vzdálenost P a Q je $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{11}$. □

Úloha 7.4. V afinním prostoru \mathbb{Z}_5^4 nad tělesem \mathbb{Z}_5 s vektorovým prostorem \mathbb{Z}_5^4 uvažujme tři podprostory

$$D_1 = \text{AO}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad D_3 = \left\{a \in A \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

(a) Najděte soustavu souřadnic a barycentrickou soustavu souřadnic afinních prostorů D_1 , D_2 a D_3 .

(b) určete parametrické vyjádření podprostorů D_1 a D_3 ,

(c) určete rovnicové vyjádření podprostorů D_1 a D_2 ,

(d) určete podprostory D_2 a D_3 jako afinní kombinace bodů.

Řešení. (a) Nejprve najdeme jeden bod podprostoru a potom bázi příslušného vektorového prostoru.

Pro D_1 si můžeme vzít například jeho bod $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a poté spočítat vektory $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} -$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Protože jsou vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 zřejmě lineárně nezávislé, dostáváme souřadnou soustavu $S_1 = (a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, proto posloupnost $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic afinního prostoru D_1 .

Pro prostor D_2 není třeba nic počítat, abychom dostali

$$S_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{a} \quad B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

soustavu souřadnic a barycentrickou soustavu souřadnic prostoru D_2 .

Pro prostor D_3 je třeba najít jedno řešení $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nehomogenní soustavy a bázi řešení homogenní soustavy $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ s ma-

ticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}$. Nyní máme $S_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ a dopočítáme $B_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ soustavu

souřadnic a barycentrickou soustavu podprostoru D_3 .

Nalezené souřadné soustavy využijeme pro zodpovězení úloh (b), (c) a (d).

(b) Tím, že už jsme pro dané podprostory našli soustavu souřadnic, zbývá jen sepsat

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Využijeme parametrický popis prostoru D_1 a najdeme takovou matici A_1 , že množina všech řešení homogenní soustavy s maticí A_1 bude rovna $\text{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, tedy potřebujeme opět vyřešit homogenní soustavu rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Bázi řešení tvoří například vektory } (3, 0, 1, 0)^T, (3, 3, 0, 1)^T, \text{ které seřadíme do řádků hledané matice } A_1.$$

Nyní zbývá spočítat $\mathbf{b}_1 = A_1(2, 3, 2, 1)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zjistili jsme, že bod x leží v podprostoru D_1 právě tehdy, když je x řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Protože máme prostoru D_2 dán parametricky, postupujeme stejně jako u hledání rovnicového popisu D_1 . Nejprve najdeme bázi řešení jediné (homogenní) lineární rovnice s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a tu sepíšeme do řádků matice $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nyní dopočítáme vektor pravých stran $\mathbf{b}_2 = A_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Zjistili jsme, že D_2 tvoří právě

množina všech řešení soustavy lineárních rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Tím, že jsme v (a) našli barycentrickou soustavu souřadnic, úlohu už jsme vyřešili, stačí totiž vzít její body, tedy:

$$D_2 = \text{AO}\{B_2\} = \text{AO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad D_3 = \text{AO}\{B_3\} = \text{AO}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Další základní příklady k počítání:

Úloha 7.5. Uvažujme posloupnost bodů $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ a bod $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ v afinním prostoru nad tělesem \mathbb{R} s vektorovým prostorem \mathbb{R}^3 .

(a) Ověřte, že je B barycentrická soustava souřadnic afinního prostoru a že body B tvoří (nedegenerovaný) čtyřstěn,

(b) spočítejte barycentrické souřadnice bodu b vzhledem k barycentrické soustavě souřadnic B a

(c) najděte bod c s barycentrickými souřadnicemi $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)^T$ vzhledem k soustavě B ,

(d) určete barycentrické souřadnice bodu b vzhledem k soustavě $B' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ (využijte podobnost s B),

(e) rozhodněte, zda bod b či c leží ve čtyřstěnu B .

Úloha 7.6. Uvažujme aritmetický afinní prostor \mathbb{R}^4 se zaměřením \mathbb{R}^4 . Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \text{AO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right\},$$

kde a je pevné reálné číslo a D_2 je řešením soustavy (s jedinou rovnicí)

$$(2, 3, 4, 1) \cdot x = 10.$$

Ukažte, že D_2 je nadrovina a určete hodnotu a tak, aby D_1 a D_2 byly rovnoběžné.

Úloha 7.7. Uvažujme aritmetický afinní prostor \mathbb{R}^4 se zaměřením \mathbb{R}^4 . Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \text{AO}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}.$$

Pro oba podprostory určete jejich dimenzi a nalezněte jejich rovnicové vyjádření. Určete jejich vzájemnou polohu.

Řešení doplňujících úloh:

5. (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (c) $c = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, (e) b neleží a c leží ve čtyřstěnu B .

6. Nadrovina v \mathbb{R}^4 je podle definice libovolný podprostor dimenze 3 což množina řešení splňuje podle. Rovnoběžnost nastane pouze pro $a = -8$.