Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 3, verze ze dne 25. října 2022

3 Rovinné křivky

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se různým způsobem parametrizovat rovinné křivky.
- Za domácí úkol je úloha 3.5. Odevzdejte prosím do SISu nejpozději do začátku pátého cvičení.

Příklady:

Úloha 3.1. V rovině mějme body $A = [2, 3]$, $B = [-2, -1]$.

1. Nalezněte regulární parametrizaci $\mathbf{c}(t)$ úsečky AB tak, aby $A = \mathbf{c}(0)$ a $B = \mathbf{c}(1)$.
2. Nalezněte parametrizaci této úsečky obloukem (tedy $||\mathbf{c}'(t)|| = 1$) takovou, že $A = \mathbf{c}(5)$.
3. Nalezněte regulární parametrizaci této úsečky takovou, aby $A = \mathbf{c}(0)$ a $B = \mathbf{c}(1)$ a $\mathbf{c}(\frac{1}{3})$ byl její střed.
4. Nalezněte nějakou parametrizaci AB na, která bude hladká, prostá, ale v některém bodě nebude regulární ($\mathbf{c}'(t) = (0, 0)$ pro nějaké t.)

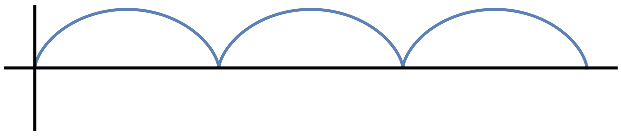
Řešení.

1. Například $(2 - 4t, 3 - 4t)^T,\ t \in [0, 1]$,
2. například $(2 - \frac{s-5}{\sqrt{2}}, 3 - \frac{s-5}{\sqrt{2}})^T, s \in [5, 5 + 4\sqrt{2}]$,
3. například $(3t^2 - 7t + 2, 3t^2 - 7t + 3)^T,\ t \in [0, 1]$,
4. například $(2 - 4t^3, 3 - 4t^3)^T,\ t \in [0, 1]$.

Úloha 3.2. Parametrizujte elipsu $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$. Otočte ji o $\pi/4$ okolo bodu $[-2, 0]$ (najděte implicitní i parametrické vyjádření).

Řešení. Například $[2\cos t, \sin t],\ t \in [0, 2\pi]$.
Implicitní vyjádření zobrazené elipsy:
$\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(5\sqrt{2}x^2 - 6\sqrt{2}xy + 20\sqrt{2}x - 8x + 5\sqrt{2}y^2 - 12\sqrt{2}y - 8y + 20\sqrt{2} - 16\right)$,
parametrické: $[\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}\sin(t) + 2\sqrt{2}\cos(t) + 2\sqrt{2} - 4\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(t) + 2\cos(t) + 2\right)],\ t \in [0, 2\pi]$

Úloha 3.3. Cykloida. Uvažujme kolo o poloměru a, které se valí konstantní rychlostí v po ose x doprava. Parametricky popište trajektorii bodu na kole, který v čase $t = 0$ nacházel v bodě $(0, 0)$. Vypočtěte znaménkovou křivost.

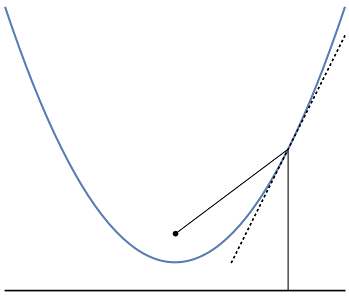


Řešení. například $\mathbf{c}(t) = [a(t-\sin t), a(1-\cos t)]$, $\kappa_z(t) = \frac{-\sqrt{2}}{4a\sqrt{1-\cos t}}$, křivka není regulární pro $t = 2k\pi$.

Úloha 3.4. Kissoida. Uvažujme kružnici k o poloměru r a nějakou její tečnu p. Označme jako S bod dotyku přímky p s kružnicí k a nechť bod A leží na kružnici k naproti bodu S. Pro polopřímku q, která vychází z bodu A a která se protíná s přímkou p, označme jako R bod průniku p a q, jako Q bod průniku k a q. Označme jako P bod na q, který splňuje $|A-P| = |Q-R|$. Najděte rovnici, která určuje množinu všech takových bodů P, a najděte parametrický popis této množiny (křivky).

Řešení. Pro obrázek a řešení viz Cissoid of Diocles na wikipedii.

Úloha 3.5. Uvažujme parabolu $[t, t^2]$, bod $F = [0, a]$ a přímku $p : y = -a, \ a \in \mathbb{R}$.



Určete a tak, aby měl každý bod paraboly stejnou vzdálenost od bodu F (ohniska) a přímky p (řídící přímky) a ukažte, že tečna k parabole půlí úhel příslušných průvodičů. Parametrizujte množinu bodů, které jsou obrazem ohniska v osové souměrnosti podle všech normálových přímek paraboly.

Úloha 3.6. ** Tractrix je křivka, kterou kopíruje předmět tažený na provázku. Ve výchozí situaci se předmět nachází v bodě $[1, 0]$ a člověk v počátku, tj. v bodě $[0, 0]$. Člověk se pohybuje konstantní rychlostí podél osy y a táhne předmět na provázku délky 1. Najděte nějakou parametrizaci tractrix.