Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení, verze 19. září 2024

Cílem cvičení je spřátelit se s kvaterniony a umět pomocí nich rotovat vektory v prostoru. Také se trochu seznámit se shodnostmi v prostoru a uvědomit si, jak jsou výpočetně náročnější oproti shodnostem v rovině.

2 Shodná zobrazení v prostoru

Úloha 2.1. Vypočtěte součin $q_1 q_2$ jednak přímo z definice a druhak geometricky pomocí formule s vektorovým a skalárním součinem. Rovněž k těmto kvaternionům nalezněte kvaterniony inverzní.

$$\begin{aligned} q_1 &= 2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{k} \\ q_2 &= 1 + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \end{aligned}$$

Řešení. $q_1 q_2 = -17 + 15\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

Úloha 2.2. Nalezněte otočení vektoru $(0, 0, 1)$ kolem vektoru $(1, 2, 2)$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v kladném směru. Pokuste se úlohy vyřešit jak pomocí Rodriguesovy formule tak pomocí kvaternionů.

Řešení. otočený vektor je $\frac{1}{6}(2 + 2\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}, 1)$

Úloha 2.3. Vyjádřete středovou souměrnost v $\mathbb{R}^3$ se středem $[1, 2, 3]$. Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

Řešení.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Úloha 2.4. Nalezněte vyjádření rovinové souměrnosti v $\mathbb{R}^3$, která zobrazuje bod $[1, 0, -2]$ na bod $[3, 2, 0]$.

Řešení. Nepřímá shodnost

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Úloha 2.5. Nalezněte vyjádření osové souměrnosti v prostoru podle přímky s parametrickým vyjádřením $[1, 0, -1] + t(1, 2, 3)$. Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

Řešení. Přímá shodnost

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

Úloha 2.6. Ověřte, že rovnice

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1, \\
y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2, \\
z' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 3,
\end{aligned}
$$

popisují přímou shodnost $\mathbb{R}^3$. Najděte samodružnou přímku tohoto zobrazení a vyjádřete je jako složení otočení kolem této přímky a posunutí v jejím směru (tedy jako šroubový pohyb). Jaká je velikost úhlu otočení a vektoru posunutí?

Řešení. Samodružná je přímka $[0, \frac{1}{2}, 2] + t(1, 0, 1)$. Shodnost je možno vyjádřit jako rotaci kolem této přímky o úhel $\arccos(-1/3)$ složenou s posunutím o její směrový vektor $(2, 0, 2)$.

Úloha 2.7. Nalezněte všechny jednotkové kvaterniony, které odpovídají rotaci, která převádí vektor $(1, 0, 0)$ na vektor $(0, 1, 0)$.

Řešení. Takovou rotaci o realizuje s nejmenším rotačním úhlem $q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$ a s největším rotačním úhlem $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Všechny ostatní takové rotace jsou dány $q = (\cos\alpha)q_1 + (\sin\alpha)q_2$.