Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Verze ze dne 22. září 2022

Za domácí úkol je úloha 1.7, odevzdejte ji do začátku třetího cvičení.

1 Shodná zobrazení v rovině

Úloha 1.1. Pro následující zobrazení z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o shodnost. Jestliže ano, nalezněte její samodružné prvky (body, směry, přímky) a inverzní zobrazení. Složte některá zobrazení mezi sebou.

a) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1$, $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$

b) $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20$, $y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$

c) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1$, $y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2$

d) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1$, $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$

e) $x' = -x + 1$, $y' = -y + 2$

f) $x' = x + 3$, $y' = -y$

Řešení.

a) otočení se středem v bodě $[-\frac{3}{2}, -2]$, žádné samodružné směry, inverzní zobrazení $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{11}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}$

b) osová souměrnost, samodružná přímka $-5x+y+52 = 0$, samodružné směry $(1, 5)$, $(5, -1)$, inverzní zobrazení $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20$, $y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$

c) není shodné

d) otočení, samodružný bod $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}]$, žádné samodružné směry, inverzní zobrazení $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) středová souměrnost, samodružný bod $[\frac{1}{2}, 1]$, všechny směry samodružné s vlastním číslem -1, inverzní zobrazení $x' = -x + 1$, $y' = -y + 2$.

f) posunutá osová souměrnost, žádný samodružný bod, samodružné směry $(1, 0)$, $(0, 1)$, inverzní zobrazení $x' = x + 3$, $y' = -y$

Hint. Zapište zobrazení maticově jako $X' = AX + p$ a rozhodněte, zda $A^TA = I_2$. Pro samodružné prvky řešte soustavu $X = AX + p$. Inverz a skládání viz Větu 1.6.

Úloha 1.2. Pomocí zobrazení z úlohy 1.1, a) zobrazte

a) bod $[2, -3]$

b) přímku $[1, 1] + t(1, 2)$

c) přímku $x + y = 3$

d) parabolu $y = x^2$

Hint. Přímku lze zobrazit v parametrickém tvaru "po bodech". Pro křivku zadanou implicitní rovnicí je třeba vyjádřit z výrazu $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$ předpis pro $\mathbf{X} = (x, y)^T$ (inverzní zobrazení).

Řešení.

a) $[-\frac{1}{5}, -\frac{27}{5}]$,

b) $[\frac{12}{5}, -\frac{11}{5}] + t(11, 2)$,

c) $7x' - y' - 24 = 0$,

d) $9x'^2 - 24x'y' + 16y'^2 - 86x' + 73y' + 111 = 0$.

Úloha 1.3. Určete reálné parametry p, q tak, aby existovala shodnost f v $\mathbb{R}^2$ taková, že $f : [3, 0] \mapsto [1, 4]$ $f : [1, 2] \mapsto [3, p]$, $f : [-1, 2] \mapsto [1 + p, -q]$. Tuto shodnost analyzujte.

Hint. Aby f byla shodnost, musí platit $||X - Y|| = ||f(X) - f(Y)||$. Vyřešte rovnice pro p, q.

Řešení. Jedna z možností je určit p, q ze vzdáleností vybraných bodů. Druhou možností je i s parametry zobrazení ve tvaru $\mathbf{AX} + \mathbf{p}$. Sestavíme soustavu rovnic a vyjde nám, že

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2-p}{2} & \frac{4-p}{2} \\ \frac{p+q}{2} & \frac{2p+q-4}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-4+3p}{2} \\ \frac{8-3p-3q}{2} \end{pmatrix}$$

První řádek matice má normu 1 pro $p = 2$ nebo $p = 4$. Norma prvního sloupce pak bude 0 pro $q = 0$ resp. $q = -4$. Pouze první volba dává ortogonální matici, zobrazení pak je

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To je posunutá osová souměrnost s osou $-x + y = 0$ a posunutím o vektor $(1, 1)$.

Úloha 1.4. Nalezněte rovnici otočení v rovině se středem $[1, 3]$ o úhel α.

Hint. Složte posunutí do počátku, otočení o α kolem počátku a posutuní zpět do bodu $[1, 3]$.

Řešení. $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha - \cos\alpha + 3\sin\alpha + 1$, $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha - \sin\alpha - 3\cos\alpha + 3$.

Úloha 1.5. Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : x - y - 3 = 0$ a určete typ shodnosti.

Hint. Složte zobrazení. Složením dvou nepřímých shodností vznikne přímá shodnost, osy jsou různoběžné, půjde tedy o otočení.

Řešení. Otočení, $x' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 15)$ $y' = \frac{1}{13}(5x - 12y - 55)$.

Úloha 1.6. Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : 2x + 3y = 0$ a určete typ shodnosti.

Hint. Složte zobrazení. Opět půjde o přímou shodnost, osy jsou rovnoběžné, půjde tedy o posunutí.

Řešení. Posunutí, $x' = x + \frac{16}{13}$, $y' = y + \frac{24}{13}$.

Úloha 1.7. Nalezněte všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$, které zobrazují přímku $3x + 4y - 5 = 0$ na osu "x"a bod $[2, 1]$ na některý bod osy "y".

Úloha 1.8. Popište všechny shodnosti v rovině, které zobrazí bod $\mathbf{X} = [2, 5]$ na bod $\mathbf{X}' = [-6, 3]$.

Hint. Rozlište dva případy, kdy je shodnost přímá nebo nepřímá. Každý z nich umíme popsat v obecném tvaru a pouze budeme vyžadovat aby $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$.

Řešení. Přímé shodnosti: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\sin\alpha - 2\cos\alpha - 6 \\ -2\sin\alpha - 5\cos\alpha + 3 \end{pmatrix}$,

nepřímé shodnosti: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5\sin\alpha - 2\cos\alpha - 6 \\ -2\sin\alpha + 5\cos\alpha + 3 \end{pmatrix}$.