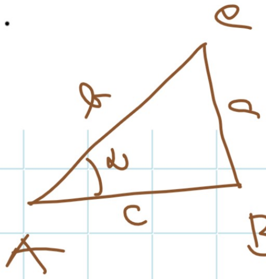
Definice 3.31. Pro trojúhelník ABC v $\mathbb{R}^2$ definujeme jeho orientovaný obsah jako

$$S_{ABC} := \frac{1}{2}\det(B-A|C-A). = \frac{1}{2}\det(C-B\,|\,A-B)$$

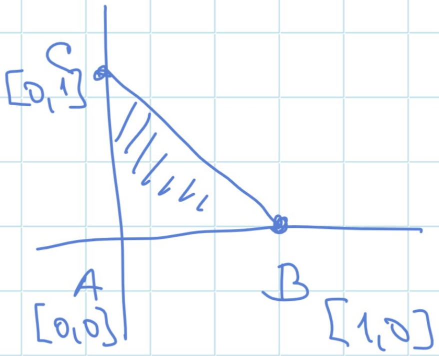
Věta 3.32. Je-li f afinita v $\mathbb{R}^2$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \boxed{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, pak $= \frac{1}{2}\mathrm{de}(\qquad)$

$$S_{f(A)f(B)f(C)} = (\det \mathbf{A})S_{ABC}.$$



Afinity v rovině tedy zachovávají poměry obsahů.

$S = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin\alpha$



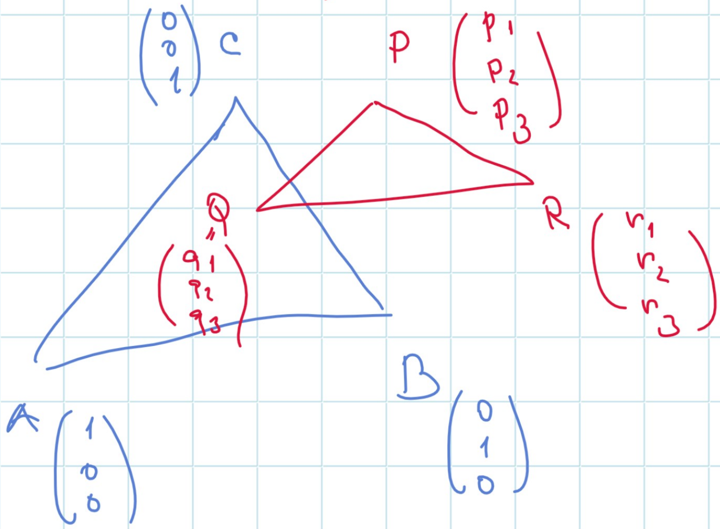
$S_{ABC} = \frac{1}{2}$

Dk.

$$S_{f(A)f(B)f(C)} = \frac{1}{2}\det\left(f(B)-f(A)\,|\,f(C)-f(A)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\det\left(\bar{f}(B-A),\ \bar{f}(C-A)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\det\left(\mathbf{A}(B-A),\ \mathbf{A}(C-A)\right) =$$
$$= \det \mathbf{A}\ S_{ABC}.$$

Věta 3.33. Nechť $Z = (A, B, C)$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic v $\mathbf{R}^2$ a P, Q, R jsou libovolné body $\mathbf{R}^2$. Pak platí

1. Body P, Q, R leží na přímce právě tehdy když $\det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z) = 0$.
2. Obecněji platí $S_{PQR} = \det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z)S_{ABC}$.



Dk 1) P, Q, R leží na přímce $\Leftrightarrow S_{PQR} = \frac{1}{2}|Q-P, R-P| = 0$

2) $$\det([P]_Z\ [Q]_Z\ [R]_Z) = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_2 & (q_2-p_2) & (r_2-p_2) \\ p_3 & (q_3-p_3) & (r_3-p_3) \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} (q_2-p_2) & (r_2-p_2) \\ (q_3-p_3) & (r_3-p_3) \end{vmatrix}}_{*}$$

$$P = A + p_2(B-A) + p_3(C-A)$$
$$Q = A + q_2(B-A) + q_3(C-A)$$
$$R = A + r_2(B-A) + r_3(C-A)$$

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\left|(Q-P)\,|\,(R-P)\right| =$$

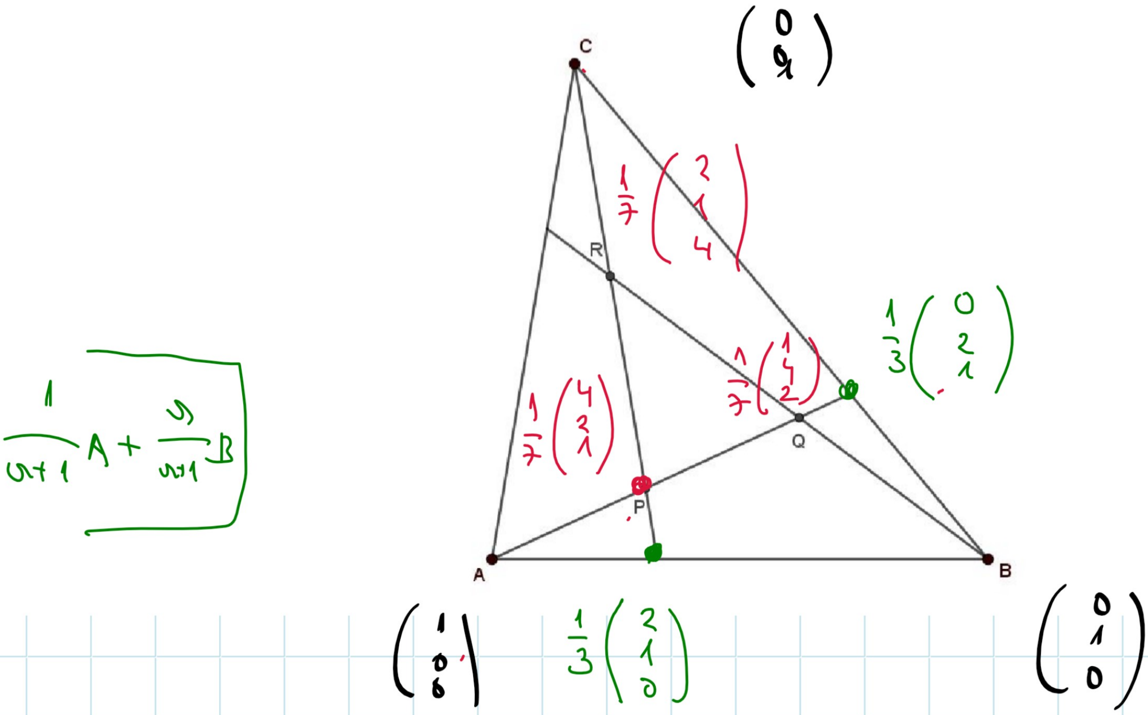
S_{ABC}

$$\frac{1}{2}\left| \begin{matrix} (q_2-p_2)(B-A) + \\ + (q_3-p_3)(C-A) \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} (r_2-p_2)(B-A) + \\ + (r_3-p_3)(C-A) \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} * \det(B-A|C-A)$$

↗ SOUČIN MATIC

Příklad 3.34. V libovolném trojúhelníku ABC veďme z každého vrcholu spojnici do (vhodné) třetiny protilehlé strany. Průsečíky těchto spojnic označme P, Q, R. Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR je jedna sedmina obsahu ABC.

$z = (A, B, C)$

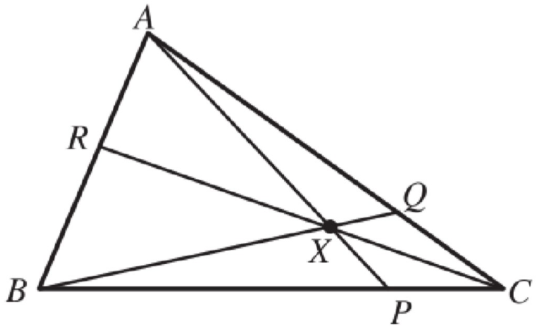


$$S_{PQR} = \frac{1}{7^3} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{7} S_{ABC}.$$

49

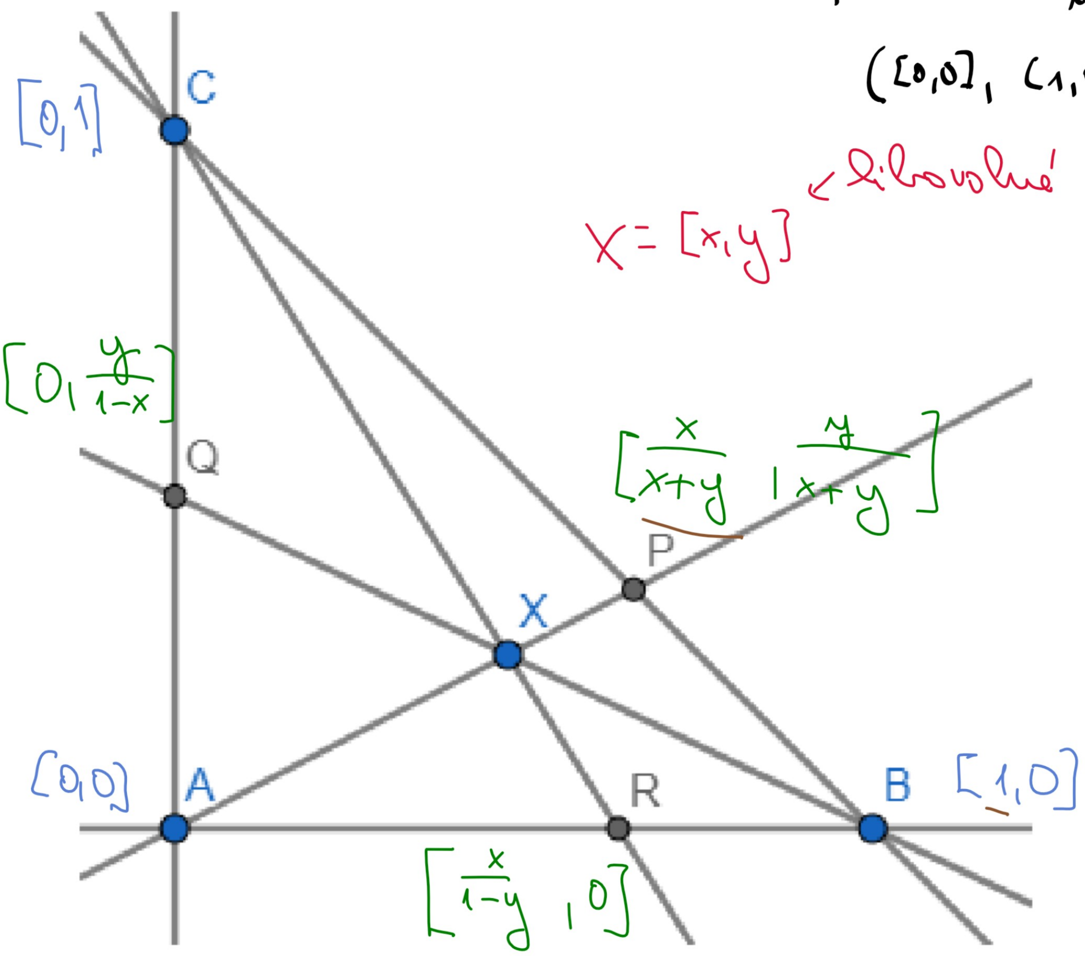
Věta 3.35 (Cevova věta)**.** Mějme trojúhelník ABC a bod X, který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Předpokládejme, že existují průsečíky $P = AX \cap BC$, $Q = BX \cap CA$ a $R = CX \cap AB$. Pak platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$



Dk. Existuje afinita, která rodový △ převede na …

počítáme v repéru ([0,0], (1,0), (0,1))



$$\frac{AR}{RB} = \frac{\frac{x}{1-y}}{1-\frac{x}{1-y}} = \frac{x}{1-x-y} \quad 1 \qquad \frac{CQ}{QA} = \frac{y-1+x}{-y} \quad 3$$

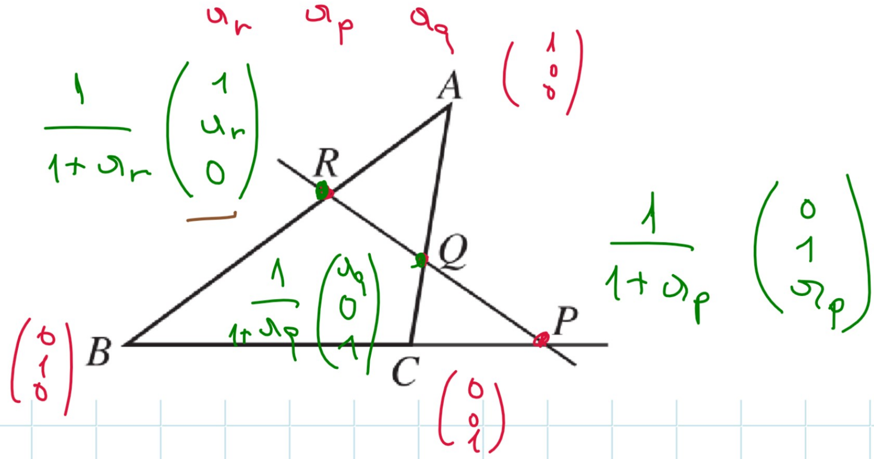
$$\frac{BP}{PC} = \frac{\frac{x}{x+y}-1}{0-\frac{x}{x+y}} = \frac{y}{x} \quad 3$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{\underline{1}}$$

Věta 3.36 (Menelaova věta)**.** Mějme trojúhelník ABC a přímku p, která neprochází žádným z vrcholů a není rovnoběžná se žádnou se stran. Označme si $P = p \cap BC$, $Q = p \cap CA$ a $R = p \cap AB$. Pak platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

$$a_r \qquad a_p \qquad a_q$$



Dk.

RPQ leží na přímce $\iff \det([R],[P],[Q]) = 0$

$$\underbrace{\frac{1}{1+a_r}\cdot\frac{1}{1+a_p}\cdot\frac{1}{1+a_q}}_{\neq 0}\ \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_q \\ a_r & 1 & 0 \\ 0 & a_p & 1 \end{vmatrix}}_{(1 + a_r a_p a_q)} = 0$$

$$a_r a_p a_q = -1$$

Definice 4.1. Mějme vektorový prostor V^{n+1} dimenze $(n+1)$ nad tělesem T. Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů V nazveme projektivním prostorem dimenze n nad tělesem T a označujeme ho $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nebo zkráceně jen $\mathbb{P}^n$:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1}) = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Prvky této množiny nazýváme projektivní body a odpovídající vektory $\mathbf{v}$ jejich vektorové zástupce. Zjevně, jestliže $\mathbf{v}$ je vektorovým zástupcem X, pak pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ je i $\lambda\mathbf{v}$ vektorovým zástupcem X.

$\underbrace{T = \mathbb{R} \qquad n = 2}$

$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

$\vec{v}$

$A = LO\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\} = LO\left\{\begin{pmatrix}-10\\-20\\-30\end{pmatrix}\right\}$

$B = LO\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Definice 4.2. Mějme vektorový prostor V dimenze $n+1$ nad tělesem T a odpovídající projektivní prostor $\mathbb{P}_n$. Libovolnou bázi $(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_{n+1})$ nazveme *soustavou projektivních souřadnic* prostoru $\mathbb{P}_n$. Souřadnicemi bodu $X \in \mathbb{P}_n$ pak rozumíme uspořádanou $n+1$-tici skalárů $(c_1, \dots c_{n+1})$ takovou, že

$$X = LO\{\sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{v}_i\}.$$

Tyto souřadnice jsou dány až na násobek, protože pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(c_1, \dots c_{n+1})$ a $(\lambda c_1, \dots \lambda c_{n+1})$ určují stejný projektivní bod X. Proto se těmto souřadnicím někdy říká *homogenní* a zjevně vždy alespoň jedno c_i musí být nenulové. Konečně pro libovolné $0 \neq \mu \in T$ zjevně báze $(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_{n+1})$ a $(\mu\mathbf{v}_1, \dots \mu\mathbf{v}_{n+1})$ určují stejný systém projektivních souřadnic.

$\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n+1}$

$\sum c_i v_i = \sum \underbrace{\left(\frac{1}{\mu} \cdot c_i\right)}_{\tilde{c}_i} \cdot \tilde{v}_i$

$\Rightarrow$ nebudeme psát "LO"

$2x + 3y + 7 = 0$

$-2x - 3y - 7 = 0$

Definice 4.3. Podmnožinu $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ nazveme projektivním podprostorem dimenze k, jestliže existuje vektorový podprostor $V^{k+1} \leq V^{n+1}$ dimenze $(k+1)$ tak, že

$$\mathbb{P}^k = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Projektivní (pod)prostor dimenze 0 nazýváme bod, (pod)prostor dimenze 1 přímka, (pod)prostor dimenze 2 rovina a podprostor maximální dimenze $(n-1)$ nadrovina. Řekneme, že bod $LO\{\mathbf{w}\}$ leží v podprostoru $\mathbb{P}^k$, jestliže $LO\{\mathbf{w}\} \leq V^{k+1}$.

$2 \quad 1 \quad = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

přímka

nadrovina

Př. $\mathbb{P}^2 \dots \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

$k = 1$ $\quad p = \left\{ LO\{\vec{v}\} ; \vec{v} \in LO\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}\right\}$

$A \in p \qquad B \in p \qquad C = LO\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}300\\400\\500\end{pmatrix}$

Definice 4.4. Jestliže $\mathbb{P}(V^{k+1})$ je podprostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ a $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k+1})$ nějaká báze V^{k+1}, pak lze každý bod $X \in \mathbb{P}(V^{k+1})$ vyjádřit jako

$$X = LO\{\sum_{i=1}^{k+1} t_i \mathbf{w}_i\}.$$

Tomuto vyjádření říkáme *parametrické vyjádření podprostoru*. Pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(t_1, \dots t_{k+1})$ a $(\lambda t_1, \dots \lambda t_{k+1})$ určují stejný projektivní bod X.

param. vyjádření

$$p: \quad \underbrace{t_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}} = \dots \quad \text{bod na přímce}$$

2 1

Definice 4.5. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T. Každá nadrovina $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ může být popsána pomocí nenulové lineární, formy která je prvkem duálního prostoru formy $\ell \in V_*^{n+1}$:

$$\mathbb{P}^{n-1} = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, \ell(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Toto vyjádření nazýváme rovnicové vyjádření nadroviny. Navíc, pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ popisuje $\lambda\ell$ tutéž nadrovinu. Souřadnice lineární formy označujeme jako řádky s hvězdičkou.

Př. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\qquad \ell: V^{n+1} \to T$

$2x_1 - 7x_2 + ?x_3 = 0$

Ker ℓ má dimenzi n

$\mathbb{P}(\mathrm{Ker}\,\ell)$ má dim $n-1$ $\Rightarrow$ nadrovina

$$p \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-4\end{pmatrix}$$

řešení $LO\{(1,-2,1)\}$

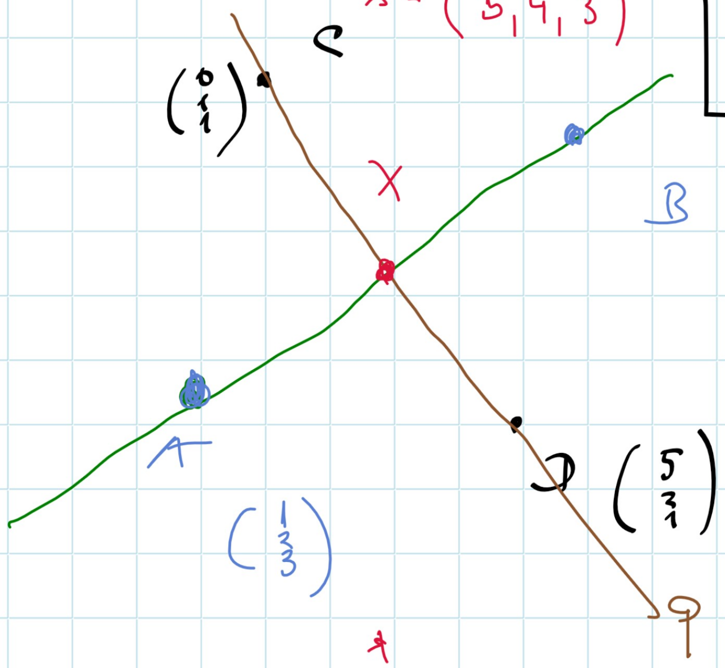
$$p: \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$ obecná rovnice přímky

$p = (1,-2,1)^*$ $\qquad A \in p \qquad (1,-2,1)^* \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 0$ ← maticové nás.

Příklad 4.6 (Výpočty v projektiní rovině.). V projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka a každé dvě různé přímky se protnou v jednom bodě. Mějme zadány body $A = (1,2,3)$, $B = (1,0,-1)$, $C(0,1,1)$, $D(5,2,1)$. Určete bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.

$X = (5,4,3)$

$\boxed{(1,-2,1)^*}$



$t_1 = 2$
$t_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 5t_2 \\ t_1 + 2t_2 \\ t_1 + t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\boxed{q: \ t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$q: (1, -5, 5)^*$$

$$x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$p: \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$5t_2 - 2(t_1 + 2t_2) + (t_1 + t_2) = 0$$

$$-t_1 + 2t_2 = 0$$

$$(t_1, t_2) = a(2,1)$$

Definice a lemma 4.7. Mějme v projektivním prostoru $\mathbb{P}^n$ nad tělesem T čtyři navzájem zůzné body A, B, C, D, které leží na jedné projektivní přímce. Nechť $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a nechť platí

$c \cdots\to \tilde{c} = u \cdot c$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \overset{\cdot u}{\alpha_1}\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \overset{\cdot u}{\alpha_2}\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b}. \end{aligned}$$

$a \cdots\to \tilde{a} = u \cdot a$

$\alpha_1 \cdots\to \tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{u} \cdot \alpha_1$

$\alpha_2 \cdots\to \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{u} \cdot \alpha_2$

Pak definuji *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2} \in T,$$

kterýžto výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže $(A, B, C, D) = -1$ řekneme, že uspořádaná čtveřice bodů tvoří *harmonickou čtveřici*.

Poznámka 4.8. Pro permutace pořadí bodů platí rovnosti

$$(B, A, C, D) = (A, B, D, C) = (A, B, C, D)^{-1}$$

$$(A, C, B, D) = (D, B, C, A) = 1 - (A, B, C, D)$$

Definice 4.9. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a kvadratickou formu q na V^{n+1}. Neprázdnou množinu

$$Q = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, q(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\} \subset \mathbb{P}(V^{n+1})$$

nazveme projektivní kvadrikou. Tuto kvadriku nazýváme regulární, jestliže je forma q regulární, tedy má hodnost $n + 1$. Kvadriky v projektivní rovině nazýváme též kuželosečky.

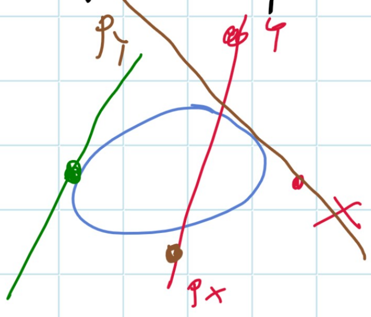
Definice 4.10. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm kvadriku Q danou kvadratickou formou q a nechť b je příslušná symetrická bilineární forma, tedy $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Řekneme, že dva body $X = LO(\mathbf{v})$, $Y = LO(\mathbf{w})$ jsou polárně sdružené, jestliže $b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

Lemma 4.11 (O polaritě)**.** Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm regulární kvadriku Q. Pak

1. Body sdružené s libovolným bodem $X \in \mathbb{P}(V^{n+1})$ tvoří nadrovinu, kterou nazveme *polára* k X a označíme p_X.

Př. $\quad q: \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - x_3^2 = 0$

$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in q$



X

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} Y = 0$$

$(1, 0, 1)$

$z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = (1, 1, -1)^*$ třeba z

Definice 4.12. Mějme dva projektivní prostory $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}(V^{m+1})$ a $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(V^{n+1})$ nad stejným tělesem T a nějakou podmnožinu $A \subset \mathbf{P}^m$. O zobrazení

$$F : A \to \mathbf{P}^n$$

řekneme, že je projektivní, jestliže existuje lineární zobrazení $\bar{F} : V^{m+1} \to V^{n+1}$ tak, že pro každé $\mathbf{v} \in V^{m+1}$ takové, že $LO\{\mathbf{v}\} \in A$ platí

$$F(LO\{\mathbf{v}\}) = LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\}.$$