Definice 3.13. Nechť A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V. Afinní prostor B nad tělesem T se zaměřením W nazveme *afinní podprostor* prostoru A, pokud $B \subseteq A$, $W \leq V$ a sčítání bodu a vektoru v B je zúžením sčítání bodu a vektoru v A.

Věta 3.14. Nechť A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V, $\mathbf{X} \in A$ libovolný bod a $W \leq V$ libovolný vektorový podprostor. Pak množina

$$\mathbf{X} + W$$

je afinní podprostor A a každý afinní podprostor lze vyjádřit tímto způsobem, který nazýváme *parametrické vyjádření*.

triv

Dk. Každý afinní prostor má tvar $X + W$

$B = \underbrace{X}_{\text{libovolný bod } B} + W$

Naopak $B := X + W$ je podprostor

a spolu s W splňují axiomy

axiom 1 ze zúžení

axiom 2 $B \ni$ $\in W$ $\exists! \vec{w} : Z = Y + \vec{w}$

$B \ni Y = X + \vec{w}_1$ ale takový vektor $\exists!$ v V

$Z = X + \vec{w}_2 \in W$

ukážeme, že leží v W

$Z = Y + \underbrace{(\vec{w}_1 - \vec{w}_2)}_{\vec{w}} \in W.$

Definice 3.15. Nechť Z je neprázdná množina bodů afinního prostoru A. *Afinním obalem* množiny Z rozumíme množinu $AO(Z)$ všech afinních kombinací bodů z Z.

Věta 3.16. Pro každou konečnou neprázdnou množinu bodů je $AO(Z)$ afinním podprostorem. Každý afinní podprostor dimenze k lze vyjádřit jako afinní obal $(k+1)$ bodů. Toto vyjádření nazýváme *bodové vyjádření*.

Dk

$$Z = (B_1, \dots, B_k)$$

$$AO(Z) = \sum_{i=1}^{k} c_i B_i = B_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{k} c_i (B_i - B_1)}_{\text{dim max } (k-1)}$$

$$W = LO\{(B_2 - B_1), (B_2 - B_1), \dots, (B_k - B_1)\}$$

tedy je af. podprostor podle 3.14.

$$B = X + W \qquad W \text{ má bázi } (w_1, \dots, w_m)$$

$$B = AO\{X, X + w_1, X + w_2, X \dots, X + w_m\}$$

dim m

Věta 3.17. Mějme soustavu lineárním rovnic s maticí M typu $m \times n$ nad tělesem T a pravou stranou c. Pak její řešení $\{x : Mx = c\}$ tvoří afinní podprostor aritmetického afinního prostoru T^n. Navíc každý afinní podprostor T^n lze vyjádřit tímto způsobem. Toto vyjádření nazýváme *rovnicové vyjádření*.

Dk. z LA víme, že řešení soustavy má tvar

$$x_1 + \ker M$$, tedy af. podprostor

part. řešení

Naopak, máme-li $B = X_1 + W$, tak existuje matice M: $W = \ker M$

a soustava má pak tvar

$$M \cdot X = M \cdot X_1 = c \quad \text{pravá strana}$$

Příklad 3.18. Uvažujme podprostor afinního prostoru $\mathbb{R}^4$

$$B = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + LO\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = AU\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

— param. Bodový

Chceme, aby naše zaměření W bylo jádrem matice M, budeme tedy řešit homogenní soustavu, kde do řádků vložíme bázi prostoru, který máme.

$$W = LO\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Máme dva pivoty, dvě volné proměnné, tedy řešení bude mít dimenzi 2. (Obecně to 2 být nemusí.)

$$\text{Řešení:} \quad LO\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Vektory z báze řešení dáme do řádků matice M.

$$M = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \ker M = W$$

Ještě určíme pravou stranu c tak, aby $\mathbf{X}$ byl řešením – jen dosadíme.

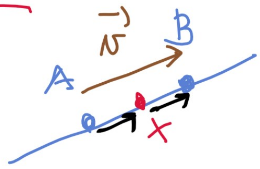
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad c = M \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Získali jsme soustavu $Mx = c$, jejímž řešením je zadaný afinní podprostor, a jde to takto udělat vždy.

Definice 3.19. (Pod)prostor dimenze 0 je *bod*, (pod)prostor dimenze 1 se nazývá *přímka*, (pod)prostor dimenze 2 se nazývá *rovina*, podprostor dimenze $(n-1)$ v prostoru dimenze n se nazývá *nadrovina*.

+ [v případě $V = \mathbb{R}^n$
přidáme skalární součin
... vzdálenosti
... odchylky]

Definice a lemma 3.20. Mějme tři body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{X}$ na afinní přímce nad tělesem T, přičemž $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ a $\mathbf{X} \neq \mathbf{B}$. Pak definujeme dělící poměr



$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}} := \lambda,$$

jako jediný skalár, pro který platí $\lambda(\mathbf{B} - \mathbf{X}) = (\mathbf{X} - \mathbf{A})$. Potom platí, že $\mathbf{X}$ je afinní kombinací bodů $\mathbf{A}, \mathbf{B}$

$\neq 0$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\lambda + 1}\mathbf{A} + \frac{\lambda}{\lambda + 1}\mathbf{B}$$

a tedy naopak, jsou-li (c_1, c_2) barycentrické souřadnice $\mathbf{X}$ v soustavě $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, pak

$\boxed{X = c_1 A + c_2 B}$

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Důkaz. Označme $(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{v}$ a nechť $(\mathbf{X} - \mathbf{A}) = \mu\mathbf{v}$. Potom $(\mathbf{B} - \mathbf{X}) = (1 - \mu)\mathbf{v}$ a tedy $\lambda = \frac{\mu}{1-\mu}$. Ekvivalentně $\mu = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ a máme

μ

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + \frac{\lambda}{\lambda + 1}(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \underbrace{\frac{1}{\lambda + 1}}_{c_1}\mathbf{A} + \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda + 1}}_{c_2}\mathbf{B}.$$

$c_1 + c_2 = 1$

Zjevně pak i $\frac{c_2}{c_1} = \lambda$.

Definice 3.21. Nechť A je afinní prostor a $B = \mathbf{X} + U$, $C = \mathbf{Y} + W$ jeho podprostory. Říkáme, že B a C jsou

- *rovnoběžné*, pokud $U \leq W$ nebo $W \leq U$
- *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a množiny bodů mají neprázdný průnik $B \cap C$.
- *mimoběžné* pokud nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné.

Definice 3.22. Mějme afinní prostory A, B se zaměřeními V, W nad stejným tělesem T. Řekneme, že zobrazení $f : A \to B$ je *afinní*, jestliže zachovává afinní kombinace, tedy jestliže pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_k \in A$ a koeficienty $c_1, \dots c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$ platí

$$f(\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{B}_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i f(\mathbf{B}_i).$$

Důsledek 3.23. Afinní zobrazení zachovávají dělící poměry. Přesněji, jestliže $f(\mathbf{A}) \neq f(\mathbf{B})$, pak

$$\frac{f(\mathbf{A})f(\mathbf{X})}{f(\mathbf{X})f(\mathbf{B})} = \frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}}.$$

$$\frac{AX}{XB} = a \iff X = \frac{1}{1+a} A + \frac{a}{1+a} B$$

$\Downarrow$ ← afinní zobr.

$$\frac{f(A)f(X)}{f(X)f(B)} = a \iff f(X) = \frac{1}{1+a} f(A) + \frac{a}{1+a} f(B)$$

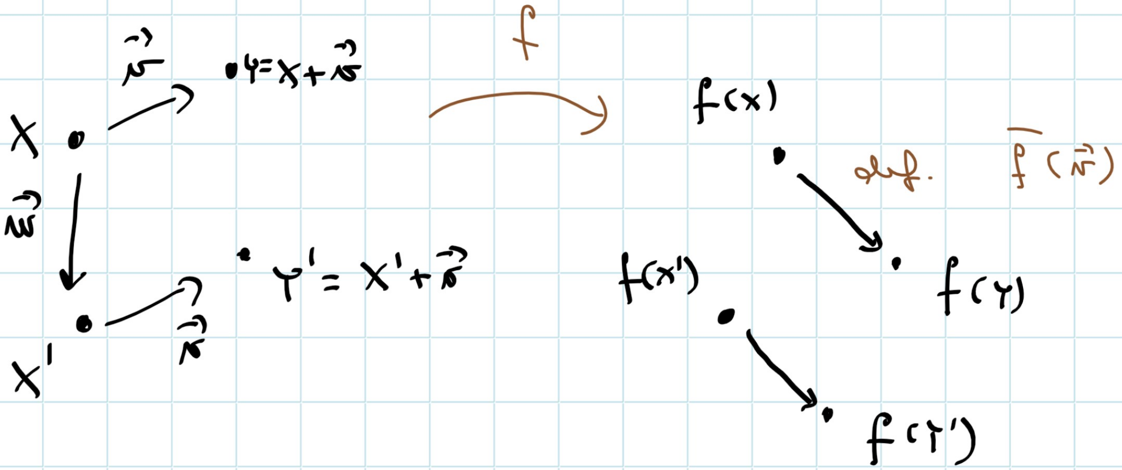
↖ předp. $f(A) \neq f(B)$

Definice a lemma 3.24. Mějme afinní prostory A, B se zaměřeními V, W nad stejným tělesem T a $f : A \to B$ afinní zobrazení. Definujeme zobrazení $\bar{f} : V \to W$ předpisem

$$\bar{f}(\mathbf{v}) = f(\underline{\mathbf{X} + \mathbf{v}}) - f(\mathbf{X}),$$

kde $\mathbf{X} \in A$ je libovolný bod. Tato definice na volbě bodu $\mathbf{X}$ nezávisí a navíc takto definované $\bar{f}$ je lineární a nazývá se asociovaný homomorfismus.

Dk.



① Nezávislost definice:

definujme: $\vec{w} = X' - X$, pak platí

$$Y' = X + 1\cdot\vec{w} + 1\cdot\vec{v} = (-1)X + (1)X' + (1)Y \qquad \leftarrow \text{af. komb.}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{f(Y')} = (-1)f(X) + (1)f(X') + (1)f(Y) =$$

$$= \underbrace{f(X) + 1[f(X') - f(X)]}_{f(X')} + 1\,\underline{[f(Y) - f(X)]}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{f(Y') - f(X') = f(Y) - f(X)}$$

V

② Linearita $\bar f$: máme $\vec v_1, \dots, \vec v_k \in V$, $\vec v = c_1 \cdot \vec v_1 + \dots c_k \vec v_k$

a tedy B a P libovolný

definujeme

$$B_i = P + \vec v_i \qquad X = P + \vec v = P + \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \vec v_i =$$

$$= (1 - (c_1 + c_2 + \dots + c_k))P + \sum_{i=1}^{k} c_i B_i$$

af. zob.

$$f(X) = (1 - (c_1 + \dots + c_k)) \cdot f(P) + \sum_{i=1}^{k} c_i f(B_i) =$$

$$= f(P) + \sum_{i=1}^{k} c_i \underbrace{(f(B_i) - f(P))}_{\bar f(B_i - P) = \bar f(\vec v_i)}$$

$$f(X) - f(P) = \bar f(\vec v)$$

Důsledek 3.25. Každé afinní zobrazení je dáno svým asociovaným homomorfismem a obrazem jednoho bodu:

$$f(\mathbf{X} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{X}) + \bar f(\mathbf{v}), \quad \text{neboli} \quad f(\mathbf{Y}) = f(\mathbf{X}) + \bar f(\mathbf{Y} - \mathbf{X}).$$

Obrazem afinního podprostoru v afinním zobrazení je opět afinní podprostor. Afinní zobrazení navíc zachovávají rovnoběžnost podprostorů. Dále je afinní zobrazení je injektivní, surjektivní či bijektivní právě tehdy když tuto vlastnost má asociovaný homomorfismus.

Pk.

vekt. podprostor — vekt. podprostor

$$f(X + W) = f(X) + \bar f(W)$$

$$f(X' + W') = f(X') + \bar f(W')$$

$$W \leq W' \quad \Rightarrow \quad \bar f(W) \leq \bar f(W')$$

↑ norm.

např. jestliže $\bar f$ není prosté: $\bar f(\vec v_1) = \bar f(\vec v_2)$

X libovolný, $Y_1 := X + \vec v_1$, $Y_2 = X + \vec v_2$ | $f(Y_1) = f(X) + \bar f(\vec v_1) = f(Y_2)$

Definice 3.26. Afinní zobrazení $f : A \to A$ z afinního prostoru do sebe nazveme *afinita*, jestliže je bijektivní.

Věta 3.27. Zobrazení $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$ je afinní právě tehdy když má tvar

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{A}$ je matice $n \times m$ a $\mathbf{p}$ je vektor $n \times 1$. V případě $m = n$ je toto zobrazení afinitou právě tehdy, když je matice $\mathbf{A}$ regulární.

Dk. Mějme f afinní $T^m \to T^m$

$$f(x) = f(y) + \bar{f}(x-y) \qquad \text{volme } y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{f\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{p} + \underbrace{\bar{f}(x)}_{A \cdot X}$$

Naopak, ukážeme, že každé $f(x) := A \cdot X + p$ je afinní

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} c_i B_i\right) = A\left(\sum_{i=1}^{k} c_i B_i\right) + p = \sum_{i=1}^{k} c_i (A \cdot B_i + p) =$$

součet c_i je $= 1$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot f(B_i)$$

A je regulární $\iff$ $\bar{f}$ je bijekce $\iff$ f je bijekce

Důsledek 3.28. Afinity z $\mathbb{R}^n$ do sebe vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{A}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Všechny shodnosti popsané v Důsledku 1.5 jsou i afinitami, $\mathbb{E}(n)$ je tedy podgrupou $\mathbb{A}(n)$. Rovněž afinní grupu můžeme vnořit do maticové grupy způsobem popsaným ve Větě 1.7.

Důsledek 3.29. Afinní zobrazení $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$ je jednoznačně dána obrazy $m+1$ bodů v obecné poloze. Speciálně zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je dáno obrazem 3 bodů, které neleží na jedné afinní přímce.

Poznámka 3.30. I afinity $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je možno klasifikovat podobně jako shodnosti, tříd bude ovšem větší počet, protože máme více stupňů volnosti (stačí aby matice byla regulární, nemusí být ortonormální). Kromě shodností jsou významnými příklady afinit stejnolehlosti (matice je násobkem jednotkové), podobnosti (matice je násobkem ortonormální), osové afinity (existuje celá přímka samodružných bodů). Důležitým příkladem neprostého afinního zobrazení jsou projekce.

Dk. $\boxed{B_1, \dots, B_{m+1}}$ v obecné poloze

$f(B_1), \dots, f(B_{m+1})$

$\Rightarrow$ $(B_2 - B_1), (B_3 - B_1), \dots, (B_{m+1} - B_1)$ tvoří bázi T^m

a musí se zobrazit v

$$\bar{f}(B_i - B_1) = f(B_i) - f(B_1)$$

$\Rightarrow$ takové $\bar{f}$ existuje právě jedno

$$\forall x: \quad f(x) = f(B_1) + \bar{f}(x - B_1)$$

stačí v B_i