Definice 3.1. Mějme vektorový prostor V dimenze n nad tělesem T. Neprázdnou množinu A spolu se zobrazením $\oplus : A \times V \to A$ nazveme *afinním prostorem se zaměřením V jestliže*

$Y = X \oplus \vec{u}$

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{X} \in A : (\mathbf{X} \oplus \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v} = \mathbf{X} \oplus (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ $\oplus (u+v)$ $Y \oplus \vec{v}$
2. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in A, \boxed{\exists! \mathbf{v} \in V} : \mathbf{X} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{Y}$, *tento vektor značíme* $\mathbf{v} = \mathbf{Y} \ominus \mathbf{X}$.

Prvky A nazýváme body *afinního prostoru. Dimenzi afinního prostoru definujeme jako dimenzi jeho zaměření. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme místo $\oplus$ psát obyčejné $+$ a místo $\ominus$ psát $-$.*

Příklad 3.2.

- Množina $A = \mathbb{R}^2$ je afinním prostorem nad vektorovým prostorem $V = \mathbb{R}^2$.
- Obecně pro libovolný vektorový prostor můžeme klást $A = V$.
- Množina
$$A = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z - 6 = 0\} \quad *$$
je afinním prostorem nad
$$V = LO\{(-2, 1, 0)^T, (-3, 0, 1)^T\}.$$
- Obecně je každý lineární útvar (řešení soustavy lineárních rovnic) afinním prostorem nad svým zaměřením (řešením příslušné homogenní soustavy).

1

$A = \mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^2$

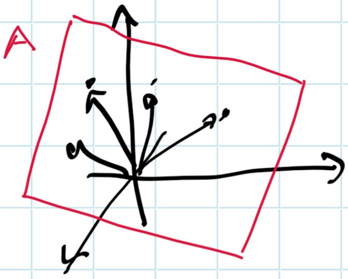
$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$X \oplus \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\exists! \, v$

3 množina do $\mathbb{R}^3$



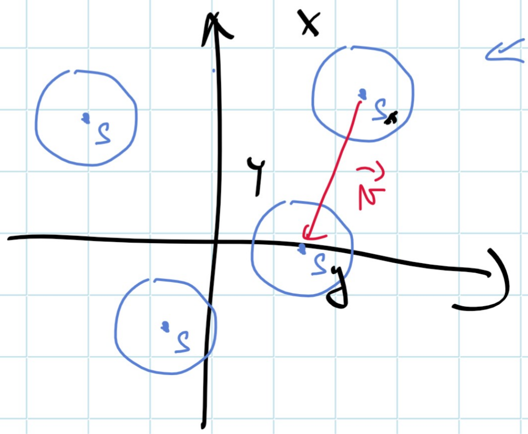
z LA

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \underbrace{s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V}$$

Axiom 2   v vždy existuje

$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ řeší $*$ $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ taky řeší $*$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in LO\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Příklad v $\mathbb{R}^2$ bude $A = \{\text{kružnice o poloměru } R=1\}$

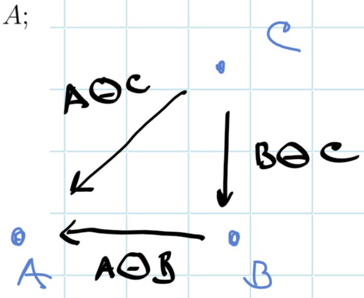


$\Leftarrow$ dány středem $S = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}$

$$X \oplus \vec{v} := Y$$

Věta 3.3. Mějme afinní prostor A se zaměřením V, pak pro libovolné prvky $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in A$; $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

1. $\mathbf{A} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{B} \ominus \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B})$
3. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \ominus \mathbf{C}) = \mathbf{A} \ominus \mathbf{C}$
4. $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{u}) - (B \oplus \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
5. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{B})$



Dk (1) $\exists! \vec{v}$: $\overset{X}{A} \oplus \vec{v} = \overset{Y}{A}$ 2. AXIOM $| + \vec{o}$

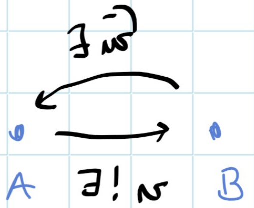
$$(A \oplus \vec{v}) \oplus \vec{o} = A \oplus \vec{o}$$

$$A \oplus \underbrace{(\vec{v} + \vec{o})}_{\vec{v}} = A \oplus \vec{o}$$

$$A = A \oplus \vec{o}$$

$(\Rightarrow \vec{v}$ musela být $\vec{o})$

(2)



$v = B \ominus A \iff A \oplus \vec{v} = B$

$\vec{w} = A \ominus B$

$$\underbrace{(\underbrace{A \oplus \vec{v}}_{B}) \oplus \vec{w}}_{A} \overset{2\,ax}{=} A \oplus (\vec{v} + \vec{w})$$

podle (1) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{o}$

$\Rightarrow \vec{v} = -\vec{w}$

OD TEĎ PÍŠEME + namísto $\oplus$

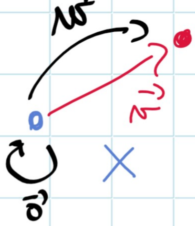
Důsledek 3.4.

① • Pro každé $\mathbf{X} \in A$ je zobrazení $\varphi_{\mathbf{X}} : V \to A$ definované jako $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{v}) = \mathbf{X} + \mathbf{v}$ bijekcí množin V a A.

• Pro každé $\mathbf{v} \in V$ je zobrazení $f_{\mathbf{v}} : A \to A$ definované jako $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{v}$ bijekcí množiny $\mathbf{A}$. Navíc zobrazení $\mathbf{v} \to f_{\mathbf{v}}$ je vnořením aditivní grupy $(V, +)$ do grupy bijekcí (permutací) $(A, \circ)$.

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$

①



$\vec{w}$, $\vec{v}$, $\varphi_X(\vec{v})$, X, $\vec{o}$

$\exists!\, v$

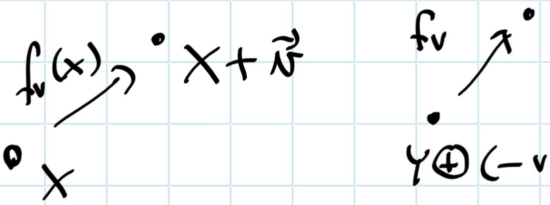
$\varphi_X(\vec{o}) = X$

$A \cong V$ (ale nepodmíněně závisí na X)

②

$\vec{v}$

perm.



$f_v(X)$, $X + \vec{v}$, X, f_v, Y, $Y \oplus (-v)$

$$Y = f_v\big(\underline{Y \oplus (-v)}\big)$$

jediný vzor každý

$\Rightarrow f_v$ je prosté a na

Navíc

$$\underline{f_{\vec{w}}\big(f_{\vec{v}}(X)\big)} = (X \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w} = X \oplus (\vec{v} + \vec{w}) = f_{\vec{v}+\vec{w}}(X)$$

skládání zobrazení

$+$ v V

Definice 3.5. *Soustavou souřadnic* (nebo také *repérem*) v afinním prostoru A dimenze n rozumíme $(n+1)$-tici $S = (\mathbf{P}, \boxed{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n})$, kde $\mathbf{P} \in A$ je bod nazývaný počátek a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze V. Pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ definujeme jeho souřadnice v soustavě S vztahem

$$[\mathbf{X}]_S = [\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B.$$

Jedná se tedy o jednoznačně určenou n-tici skalárů $(t_1, \ldots, t_n)^T$ tak, že

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \ldots + t_n\mathbf{u}_n.$$

Pro jednoduchost se i pro vektory dovoluje zápis $[\mathbf{v}]_S := [\mathbf{v}]_B$.

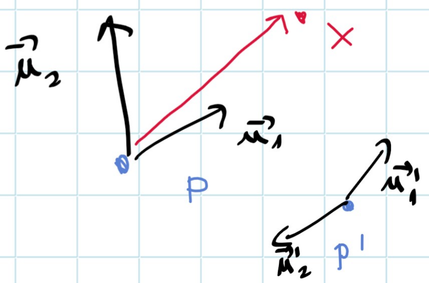
Věta 3.6. Mějme v afinním prostoru A dvě soustavy souřadnic $S = (\mathbf{P}, \underbrace{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n}_{B})$ a $S' = (\mathbf{P}', \underbrace{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n}_{B'})$. Pak pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ platí

$$[\mathbf{X}]_{S'} = [Id]^B_{B'}[\mathbf{X}]_S + [\mathbf{P}]_{S'}.$$

Zároveň pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ triviálně platí $[\mathbf{v}]_{S'} = [Id]^B_{B'}[\mathbf{v}]_S$.

$V = \mathbb{R}^2$

$A = \mathbb{R}_2$



$[X - P]_B = (t_1, t_2)$

$B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

$X - P = t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_2$

Dk 3.6. Tvrzení $[v]_{S'}$ přímo plyne z LA
← věta 3.3 bod 3

Pro body:

$$[X]_{S'} = [X - P']_{B'} = [(X - P) + (P - P')]_{B'} = [(X-P)]_{B'} + \underbrace{[P - P']_{B'}}_{[P]_{S'}}$$

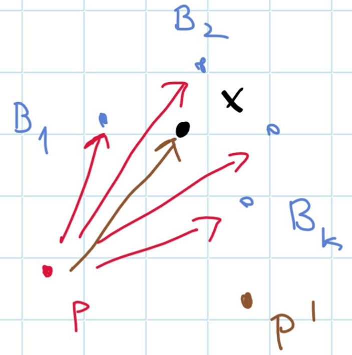
$$= [Id]^B_{B'} \underbrace{[(X - P)]_B}_{[X]_S} + [P]_{S'}$$

$\square$

Definice a lemma 3.7. Pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A a koeficienty $c_1, \dots c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$ definujeme *afinní kombinaci* $\underbrace{\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{B}_i}_{X}$ jako bod

$$\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{k} c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}), \tag{1}$$

kde $\mathbf{P}$ je libovolný bod a výraz (1) na jeho volbě nezáleží.



Dk nezávislost na volbě P:

$$P' + \sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P') = \left[P' + \left[\sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P')\right] + \overbrace{(P - P') + (P' - P)}^{\vec{o} \text{ podle 3.3 bod 2}} \right]$$

vektorový prostoru + je komutativní

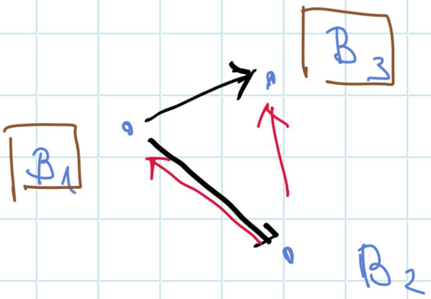
$$= P' + (P - P') + \left[\left(\sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P')\right) + \underset{= c_i}{1}(P' - P)\right] =$$

$$= P + \sum_{i=1}^{k} c_i \left[\underbrace{(B_i - P') + (P' - P)}_{(B_i - P)}\right] \qquad \square$$

Důsledek 3.8. Jestliže máme jakoukoliv soustavu souřadnic S, pak v ní vyjádříme afinní kombinaci $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{B}_i$ snadno jako $[\mathbf{X}]_S = \sum_{i=1}^{k} c_i [\mathbf{B}_i]_S$.

Dk viz skripta

Definice a lemma 3.9. O libovolných bodech $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A řekneme, že jsou *v obecné poloze* právě tehdy, když vektory $\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1)\}$ jsou lineárně nezávislé. Vlastnost *býti v obecné poloze* nezávisí na pořadí bodů.



$(B_2-B_1), (B_3-B_1)$ LN

Dk. Při permutaci $B_2, \dots, B_k$ se LZ/LN nemění

Co se stane, když $B_1 \leftrightarrow B_2$ vyměníme

$(B_2-B_1), (B_3-B_1), \dots, (B_k-B_1)$ původní pořadí

$(B_1-B_2), (B_3-B_1)-(B_2-B_1), \dots, (B_k-B_1)-(B_2-B_1)$ nové pořadí

$-(B_2-B_1)$ (B_3-B_2) (B_k-B_2)

obě množiny vektorů jsou stejně početné $(k-1)$

a mají stejný LO

↗ dim $(k-1)$ $\Rightarrow$ v obou případech LN

↘ dim $< k-1$ —"— LZ

Definice a lemma 3.10. V afinním prostoru A dimenze n mějme $(n+1)$ bodů $\mathbf{B}_1, \ldots \mathbf{B}_{n+1}$ v obecné poloze. Pak lze každý bod $\mathbf{X} \in A$ vyjádřit právě jedním způsobem jako afinní kombinaci těchto bodů

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{B}_i, \qquad \text{kde } \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1.$$

Posloupnost bodů $Z = (\mathbf{B}_1, \ldots \mathbf{B}_{n+1})$ nazýváme *barycentrická soustava souřadnic* a $(n+1)$-tici skalárů $(c_1, \ldots, c_{n+1})^T$ nazýváme barycentrické souřadnice bodu $\mathbf{X}$.

Důkaz:

$$X = \sum_{i=1}^{n+1} c_i B_i \iff$$

$$\iff \forall P \quad (X - P) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i (B_i - P)$$

speciálně můžeme volit $P = B_1$

$$(X - B_1) = c_1 \underbrace{(B_1 - B_1)}_{\vec{o}} + \sum_{i=2}^{n+1} c_i (B_i - B_1)$$

BÁZE

n LN vektorů

$\Rightarrow$ vyjádření je jednoznačné.

$c_2, \ldots, c_{n+1}$ jsou libovolné

a $c_1 = 1 - (c_2 + \ldots + c_{n+1})$

Příklad 3.11. V prostoru $A = \mathbb{R}^2$ vrcholy $\mathbf{B}_1$ jakéhokoliv trojúhelníku $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic a souřadnice těžiště jsou $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Důsledek 3.12. Jestliže $Z = (\mathbf{B}_1, \ldots \mathbf{B}_{n+1})$ je barycentrická soustava souřadnic a $(c_1, \ldots, c_{n+1})^T$ odpovídající barycentrické souřadnice bodu X, pak

$$S = (\mathbf{B}_1, (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \ldots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1))$$

je afinní soustava souřadnic a $[\mathbf{X}]_S = (c_2, \ldots, c_{n+1})^T$.