Věta 2.23 (Frenetovy vzorce)**.** Je-li $\mathbf{c}(t)$ hladká křivka v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}.$$

Věta 2.25. Nechť $f(t) > 0, g(t)$ jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu I. Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost právě jedna hladká křivka $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem na intervalu I tak, že

$$\kappa(t) = f(t), \quad \tau(t) = g(t).$$

Tyto rovnice se někdy nazývají *přirozené rovnice křivky*.

Bez Dk

$\vec{t}\,' = f(t)\cdot\vec{n} \;\Big|\; \vec{n}\,' = -f(t)\,\vec{t} + g(t)\cdot\vec{b} \;\Big|\; \vec{b}\,' = -g(t)\,\vec{n}$

soustava diferenciálních rovnic 1. řádu

\+ počáteční podmínky $t_0 \in I$

předepíši $\{\vec{t}(t_0),\ \vec{n}(t_0),\ \vec{b}(t_0)\}$

(teorie dif. rovnic) $\Rightarrow$

$\exists$ jednoznačné řešení na I.

$c(t) := \int \vec{t}(t)\,dt$

integrační konstanty

předepsat $\boxed{c(t_0)}$

Věta 2.26. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ bez inflexních bodů platí, že leží v nějaké rovině právě tehdy, když $\tau(t) = 0$ pro každé $t \in I$.

Dk: $c(t)$ leží v rovině $\rho : p\cdot x + q\cdot y + r\cdot z + s = 0$

$$(p,q,r)\cdot(x,y,z) + s = 0$$

konstantní normálový vektor $\neq \vec{0}$

$$\Downarrow$$

$$(p,q,r)\, c(t) + s = 0 \quad \Big| \tfrac{d}{dt} \quad \Big| \tfrac{d}{dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (p,q,r)\cdot c'(t) &= 0 \\ (p,q,r)\cdot c''(t) &= 0 \\ (p,q,r)\cdot c'''(t) &= 0 \end{aligned}}$$

$$\underbrace{c',\ c'',\ c'''}_{LZ} \in \left(LO(p,q,r)\right)^{\perp} \quad < \dim 2$$

$$\tau = \frac{\det(c' \mid c'' \mid c''')}{\|c' \times c''\|^2} = 0.$$

Opačná implikace: (předpokládejme, že c je param. obloukem)

$$\tau \equiv 0$$

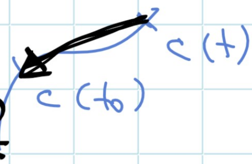
Frenet:

$$\vec{b}' = -\tau \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{b} \text{ je konstantní.}$$

zvolíme $t_0 \in I$ a definujeme funkci

$$h(t) = \left(c(t_0) - c(t)\right)\cdot \vec{b}(t) \quad \text{... konstantní}$$

$$h'(t) = -c'(t)\cdot \vec{b}(t) = -\vec{t}(t)\cdot\vec{b}(t) = 0$$



$\Rightarrow h(t)$ je konstantní

$$h(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad h \equiv 0$$

$$0 = \left(c(t_0) - c(t)\right)\cdot \vec{b} \quad \Leftarrow \text{rovina}$$

Věta 2.27. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^2$ vnořenou do $\mathbb{R}^3$ zobrazením $(x, y) \to (x, y, 0)$ platí $\kappa = |\kappa_z|$ a v neinflexních bodech $\mathbf{n} = \operatorname{sign}(\kappa_z)\mathbf{n}_*$.

Dk.

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_x(t) \\ c_y(t) \end{pmatrix} \quad 0$$

$$\kappa_z = \frac{\det\begin{pmatrix} c_x' & c_x'' \\ c_y' & c_y'' \end{pmatrix}}{\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2}^{\,3}}$$

$$\kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \frac{\|(c_x', c_y', \boxed{0}) \times (c_x'', c_y'', 0)\|}{\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2}^{\,3}} =$$

$$= \frac{\|(0, 0, \det\begin{pmatrix} c_x' & c_x'' \\ c_y' & c_y'' \end{pmatrix})\|}{\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2}} = |\kappa_z|$$

Jak je to s $\vec{n}$ a $\vec{n}_*$

$\vec{t} = (t_x, t_y, 0)$ ... tečný vektor

$\vec{n}_* = (-t_y, t_x, 0)$

$$(0, 0, \operatorname{sign} \kappa_z)$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \underbrace{\frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|}}_{(0,0,\operatorname{sign}(\kappa_z))} \times (t_x, t_y, 0) = \operatorname{sign}(\kappa_z) \cdot (-t_y, t_x, 0)$$

$$= \operatorname{sign}(\kappa_z) \cdot \vec{n}_*$$

z toho co bylo supra

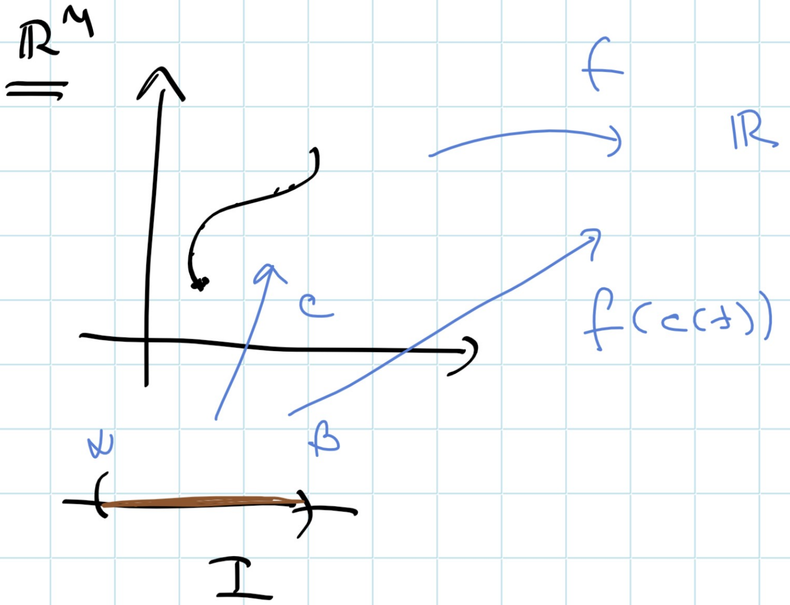
Definice 2.28. Mějme hladkou parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v $\mathbb{R}^n$ a reálnou funkci f definovanou na $\langle \mathbf{c} \rangle$. Pak definujeme *Křivkový integrál 1. druhu*

$$\int_{\mathbf{c}} f \mathrm{d}s := \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t))||\mathbf{c}'(t)||\mathrm{d}t,$$

"podle oblouku"

pokud integrál napravo existuje jako Lebesqueův integrál.

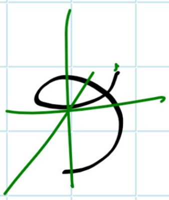
Věta 2.29. Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na (re)parametrizaci.



Př. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in (0, 2\pi)$$

$$||c'(t)|| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

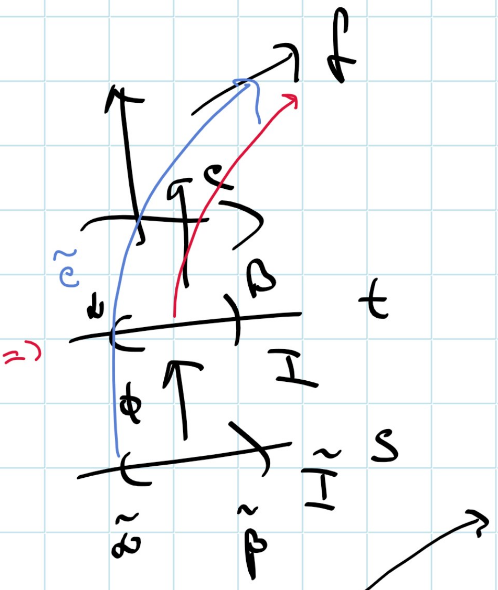


$$\int_c f \, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)\sqrt{2} \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1+t^2) \, dt = \sqrt{2}\left[\left(t + \frac{t^3}{3}\right)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right)$$

Věta 2.29. Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na (re)parametrizaci.



$\tilde c(s) := c(\phi(s))$

$$\int_{\tilde\alpha}^{\tilde\beta} f(\tilde c(s))\,\|\dot{\tilde c}(s)\|\,ds =$$

$$= \int_{\tilde\alpha}^{\tilde\beta} f(c(\phi(s)))\cdot\|c'(\phi(s))\cdot\dot\phi(s)\|\,ds =$$

$\boxed{\phi' > 0}$

$\phi' < 0$

substituce $t = \phi(s)$ $\quad dt = \phi' ds$

$= \phi'(s)$

$\Downarrow$

$$= \int_{\alpha\ \beta}^{\beta\ \alpha} f(c(t))\cdot\|c'(t)\|\cdot\underbrace{|\dot\phi(s)|\,ds}_{dt}$$

ale dole! prohozené meze $\Leftarrow$ pokud $(\phi' < 0)$

$\Rightarrow |\phi'(s)| = -\dot\phi(s)$

znaménko se kompenzuji

Definice 2.30. Délku křivky definujeme jako integrál prvního druhu z konstantní jednotkové funkce

$$\ell(\mathbf{c}) := \int_{\mathbf{c}} 1 \mathrm{d}s.$$

podle definice

$$\ell(c) = \int_\alpha^\beta 1 \cdot \|c'(t)\| \, dt$$

pro graf funkce

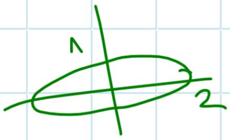
$$c(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\|c'(x)\| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Příklad (délka elipsy)

$$c(t) = \begin{pmatrix} \overset{2}{a} \cdot \cos t \\ 1 = b \cdot \sin t \end{pmatrix} \quad t \in (-\pi, \pi)$$

$$\ell(c) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \; dt$$

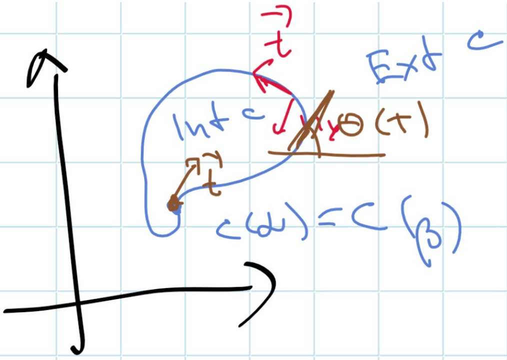


Definice 2.31. Parametrizovaná křivka $\mathbf{c} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}(\beta)$. Tuto křivku navíc nazveme *jednoduchou*, je-li $\mathbf{c}$ prosté na $[\alpha, \beta)$. Jednoduchá uzavřená rovinná křivka se rovněž nazývá *Jordanova*.

Věta 2.32 (Umlaufsatz)**.** Je-li $\mathbf{c}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ hladká uzavřená křivka, pro kterou navíc $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$, pak existuje $k \in \mathbf{Z}$ (nazývané index křivky) takové, že

$$\int_c \kappa_z \, ds = 2k\pi.$$

Je-li navíc $\mathbf{c}$ jednoduchá a kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček), pak $k = 1$.



Důkaz (částečný) máme parametrizaci $c(t)$, $I = (\alpha, \beta)$

$$\int_c k_z \, ds = \int_\alpha^\beta \underbrace{k_c(t) \cdot \|c'(t)\| \, dt}_{\theta'(t)\, dt}$$

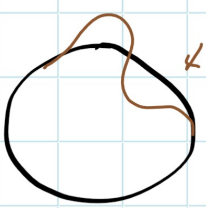
VĚTA 2.15

θ je definovaná na I

$$\vec{t}(\alpha) = \vec{t}(\beta) = (\cos\theta(\beta), \sin\theta(\beta))$$

$$\| \quad (\cos\theta(\alpha), \sin\theta(\alpha)) \Rightarrow \beta = \alpha + 2k\pi$$

$$\int_\alpha^\beta k_c(t) \cdot \|c'(t)\| \, dt = \int_\alpha^\beta \theta'(t) \, dt = \theta(\beta) - \theta(\alpha) = 2k\pi$$

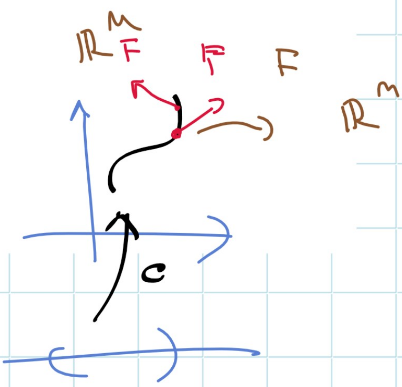


$2k\pi$

Definice 2.33. Mějme hladkou parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v $\mathbb{R}^n$ a zobrazení (vektorové pole) $\mathbf{F} : \langle \mathbf{c} \rangle \to \mathbb{R}^n$. Pak definujeme *Křivkový integrál 2. druhu*

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{X} := \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \mathrm{d}t,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.



Věta 2.34. Křivkový integrál 2. druhu nezávisí na reparametrizaci zachovávající orientaci a mění znaménko při změně orientace.

Důkaz. Pro dané $\mathbf{c}$ a F definujme funkci $f := F \cdot \mathbf{t}$ (skalární součin pole a tečného vektoru). Pak platí

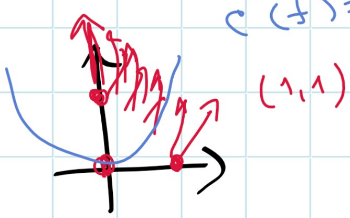
$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{X} = \int_{\mathbf{c}} f \mathrm{d}s,$$

tedy integrál 1. druhu, který se nemění při reparametrizaci. Při změně orientace se však f mění na $-f$. □

Př:

$$F(x,y) = (x, x+y)$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad t \in (-1,1)$$



$$c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\int_c F \, dX = \int_c x \cdot dx + (x+y) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (t, t+t^2) \cdot (1, 2t) \, dt =$$

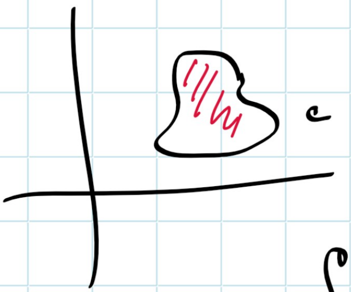
$$= \int_{-1}^{1} (t + 2t^2 + 2t^3) \, dt = \ldots$$

Věta 2.35 (Greenova věta)**.** Nechť $\mathbf{c}$ je jednoduchá, hladká, uzavřená, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka v $\mathbf{R}^2$. Nechť $\mathbf{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ je hladké vektorové pole definované na nějakém okolí uzávěru Int $\mathbf{c}$. Pak

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{X} = \int_{\text{Int }\mathbf{c}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

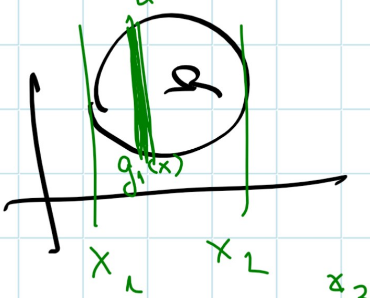
Př. c JORDANOVA

$$F(x,y) = (x^2 \cdot y,\ y^2 \cdot \sin x)$$



$$\int_c F\,dx = \int_{\text{int } c} (y^2 \cos x - x^2)\, dx\, dy$$

FUBINI



$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Důkaz (Green pro vektorové pole)

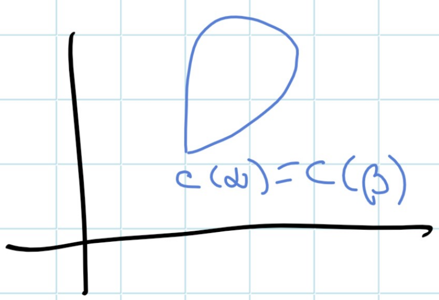
Lemma 2.36. Buď $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$, $t \in [\alpha, \beta]$ kladně orientovaná, hladká, jednoduchá, uzavřená křivka. Pak plošný obsah oblasti Int $\mathbf{c}$ je roven

$F(x,y) = (0,x)$ $\quad$ $F(x,y) = (-y,0)$ $\quad$ $F(x,y) = (-y,x)$

$$A = \int_\alpha^\beta c_x(t) c_y'(t) dt = -\int_\alpha^\beta c_y(t) c_x'(t) dt = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (c_x c_y' - c_x' c_y) dt.$$

pro všechna F platí, že $\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = 1 \Rightarrow \int_{\text{int } c} 1\, dx\, dy = \text{OBSAH}$

např. ~~pro~~ elipsy $c(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$



$$\text{Int } c \text{ obsah} = \int_{-\pi}^{\pi} a \cdot \cos t \cdot b \cos t \, dt =$$

$$= a \cdot b \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt =$$

$$= \underline{a \cdot b \cdot \pi}$$