Definice 2.17. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme *jednotkový tečný vektor* $\mathbf{t}(t)$ a *křivost* $\kappa(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \qquad \kappa(t) = \frac{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je křivost nulová se nazývá *inflexní bod*. V každém neinflexním bodě dále definujeme *jednotkový binormálový vektor* $\mathbf{b}(t)$, *jednotkový normálový vektor* $\mathbf{n}(t)$ a *torzi* $\tau(t)$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}, \qquad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t), \qquad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t)|\mathbf{c}'''(t))}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||^2}.$$

Z definice plyne, že trojice vektorů $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ tvoří v každém neinflexním bodě kladně orientovanou ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$, která se nazývá *Frenetův repér*.

Př. $c(t) = (t, t^2, t^3)^T \quad t \in \mathbb{R}$

$\boxed{t = 1}$

$c' = (1, 2t, 3t^2) \qquad c'(1) = (1, 2, 3) \qquad ||c'(1)|| = \sqrt{14}$

$c'' = (0, 2, 6t) \qquad c''(1) = (0, 2, 6)$

$c''' = (0, 0, 6)$

$c'(1) \times c''(1) = (1, 2, 3) \times (0, 2, 6) = (6, -6, 2)$

0 2 6

$||c'(1) \times c''(1)|| = 2\sqrt{19}$

$\vec{t}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3)^T, \quad \kappa(1) = \frac{2\sqrt{19}}{(\sqrt{14})^3}$

$\vec{b}(1) = \frac{1}{\sqrt{19}} (3, -3, 1)$

$\vec{n}(1) = \vec{b}(1) \times \vec{t}(1) =$

$= \frac{1}{\sqrt{19}\sqrt{14}} (3, -3, 1) \times (1, 2, 3) =$

1 2 3

$= \frac{1}{\sqrt{19}\sqrt{14}} (-11, -8, 9)$

$\tau(1) = \frac{\det(\quad)}{(2\sqrt{19})^2} = \frac{12}{4 \cdot 19} = \frac{3}{19}$

Také: $\vec{n}(1) \qquad c'(1), c''(1) \ldots \qquad c''(1) - \frac{c'(1) \cdot c''(1)}{c'(1) \cdot c'(1)} c'(1)$

G.-S.

Věta 2.18. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^3$ zachovávající orientaci se v daném bodě křivost, torze a Frenetův repér nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se křivost, torze a normálový vektor rovněž nemění, zatímco tečný a binormálový vektor se mění na vektory opačné.

Dk viz skripta (podobně jako v rovině)

$$M = \begin{pmatrix} \dot\phi & \ddot\phi & \dddot\phi \\ 0 & \dot\phi^2 & 3\dot\phi\ddot\phi \\ 0 & 0 & \dot\phi^3 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{ reparametrizace}$$

$$\dot c \times \ddot c = (\phi' \cdot c') \times (\cancel{\ddot\phi \cdot c'} + \phi'^2 \cdot c'') = (\phi')^3 \cdot (c' \times c'')$$

Např. torze

$$\frac{\det(\dot c \,|\, \ddot c \,|\, \dddot c)}{\|\dot c \times \ddot c\|^2} = \frac{\overbrace{(\det M)}^{(\dot\phi)^6} \det(c' \,|\, c'' \,|\, c''')}{(\dot\phi)^6 \cdot \|c' \times c''\|^2} = \frac{\det(c' | c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2}.$$

Věta 2.19. Křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^3$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ, $\mathbf{t}$ a v neinflexním bodě navíc τ, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{Ac}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě křivost $\tilde\kappa = \kappa$ a tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{At}$. V neinflexních bodech má navíc torzi $\tilde\tau = (\det \mathbf{A})\tau$, normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{An}$ a binormálový vektor $\tilde{\mathbf{b}} = (\det \mathbf{A})\mathbf{Ab}$.

Dk: stejný přístup jako u 2.18

Např. co se stane s $\boxed{c' \times c''}$

Pro vektorový součin platí:

① $\{\vec x, \vec y, \vec x \times \vec y\}$ tvoří kladně orient. bázi (pokud $\{\vec x, \vec y\}$ LN)

② $\vec x \times \vec y :=$ jediný vektor $\vec n$
$\forall \vec z$: $\vec n \cdot \vec z = \det(\vec x, \vec y, \vec z)$
Def. vekt. součinu

$$\det A \left[(A\vec x) \times (A\vec y)\right] = A(\vec x \times \vec y)$$

$(\det A)$. $\forall \vec z$:
$\det(A\vec x, A\vec y, \vec z)$
$\parallel$
$(\det A)\det(A\vec x, A\vec y, AA^T\vec z)$
$(\det A)^2 \cdot \det(\vec x, \vec y, A^T\vec z)$
1

$$[A(\vec x \times \vec y)] \cdot \vec z = [A(\vec x \times \vec y)] \cdot A(A^T\vec z) = (\vec x \times y) \cdot (A^T\vec z) = \det(\vec x, \vec y, A^T\vec z)$$

$\Rightarrow$ Pro křivky:

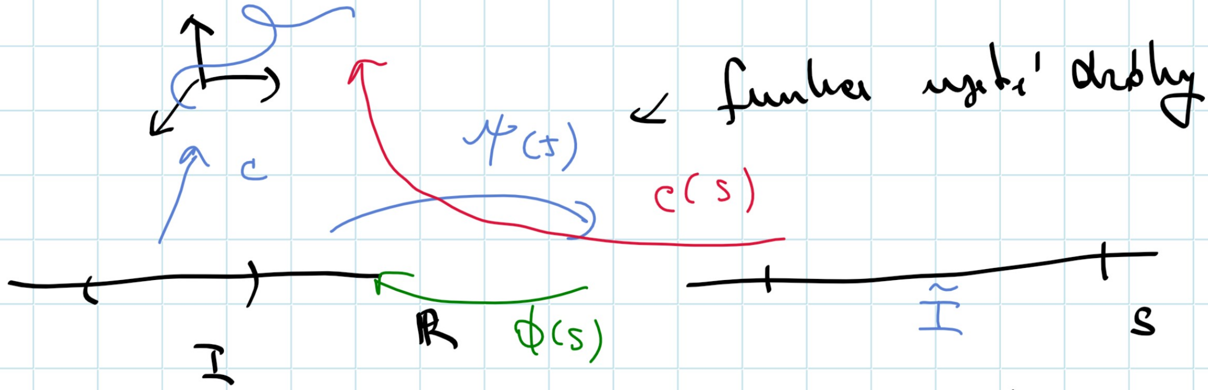
$$\tilde c' \times \tilde c'' = (\det A) \cdot A(c' \times c'')$$

Definice 2.20. Pro hladkou regulární křivku $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme v každém bodě *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t)\}$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme

- *oskulační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$, $= LO\{c', c''\}$
- *rektifikační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t)\}$,
- *normálovou rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$.

Definice a lemma 2.21. O hladké parametrizované křivce $\mathbf{c}(t)$ řekneme, že je *parametrizovaná obloukem* nebo jednotkovou rychlostí, jestliže pro všechna $t \in I$ platí $||\mathbf{c}'(t)|| = 1$. Každou hladkou regulární křivku lze parametrizovat obloukem. Je-li $\mathbf{c}(t)$ nějaká parametrizace obloukem, pak všechny ostatní parametrizace této křivky obloukem získáme reparametrizací $t = \phi(s)$, $\phi(s) = \pm s + s_0$, kde s_0 je libovolná konstanta. (v libovolné dimenzi)

Př.



Def $\quad \psi(t) = \int ||c'(t)||\, dt$

$\psi'(t) = ||c'(t)|| > 0$ rostoucí, C^∞ funkce

Má inverzní funkci $\phi(s)$.

Definuji $\quad c(s) = c(\phi(s)) \qquad \phi' = \dfrac{1}{\psi'}$

$$\dot{c} = \phi' \cdot c' = \frac{1}{\psi'} \cdot c' = \frac{1}{||c'||} \cdot c' = \vec{t}$$

$\Rightarrow \; ||\dot{c}|| = 1.$

Dále $\quad \dot{c}$ a c' byly 2 parametrizace obloukem

$$\dot{c} = \phi' \cdot c'$$

$$\overset{1}{||\dot{c}||} = |\phi'| \cdot \overset{=1}{||c'||} \Rightarrow |\phi'| = 1 \Rightarrow \phi = \begin{cases} s + s_0 \\ -s + s_0 \end{cases}$$

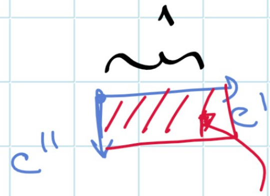
Lemma 2.22. Pro křivku hladkou $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovanou obloukem v každém bodě platí $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$ a v každém neinflexním bodě navíc platí $\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}''(t)||}$ a $\kappa(t) = ||\mathbf{c}''(t)|| = ||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||$.

Dk

$$\vec{t} := \frac{c'}{\underbrace{\|c'\|}_{=1}} = c'$$

$$c'(t)\cdot c'(t) = 1 \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$2\cdot c'(t)\cdot c''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad c' \perp c''$$



Plocha $\|c''\|$

$$\boxed{\|c'\times c''\| = \|c''\|}$$

Nyní

$$k = \frac{\overbrace{\|c'\times c''\|}^{=\|c''\|}}{\underbrace{\|c'\|^3}_{=1}} = \|c''\| = \|c'\times c''\|$$

Lemma $\underset{c'}{\vec{u}} \times (\underset{c'}{\vec{v}} \times \underset{c''}{\vec{w}}) = (u\cdot w)\cdot \vec{v} - (u\cdot v)\cdot \vec{w}$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \frac{c'\times c''}{\|c'\times c''\|} \times \frac{c'}{\|c'\|} = \frac{-1}{\|c'\|\,\|c'\times c''\|}\, c'\times(c'\times c'') =$$

$$= -\frac{1}{\|c'\|\,\|c'\times c''\|}\left[(c'\cdot c'')\cdot c' - (c'\cdot c')\cdot c''\right] =$$

$$= \frac{1}{\|c'\|\,\|c'\times c''\|}\left[\underbrace{(c'\cdot c')}_{1}\cdot c'' - \underbrace{(c'\cdot c'')}_{0}\cdot c'\right]$$

pro param. obloukem: $= \frac{1}{1\cdot k}\cdot c'' = \frac{c''}{k} = \frac{c''}{\|c''\|}$

Důsledek $\{\vec{t}, \vec{n}\} = G.-S.\{c', c''\}$

Věta 2.23 (Frenetovy vzorce). Je-li $\mathbf{c}(t)$ hladká křivka v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n},$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{t}\times\vec{n} &= \vec{b} \\ \vec{b}\times\vec{t} &= \vec{n} \\ \vec{n}\times\vec{b} &= \vec{t} \end{aligned}}$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(\mathbf{t}'|\mathbf{n}'|\mathbf{b}') = (\mathbf{t}|\mathbf{n}|\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$ jako

$\|\vec{d}\| = \sqrt{\tau^2+\kappa^2}$ totální křivost

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d}\times\mathbf{t}, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{d}\times\mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{d}\times\mathbf{b}.$$

Dk

$$\vec{n}' = \vec{d}\times\vec{n} = (\tau\cdot\vec{t} + \kappa\cdot\vec{b})\times\vec{n} = \tau\cdot\vec{b} - \kappa\cdot\vec{t}$$

Uvažme obecnější ON bázi $\{\vec{v}_1(t), v_2(t), v_3(t)\}$

Libovolný vektor $\vec{w} = \sum_{i=1}^{3} (w\cdot v_i)\,\vec{v}_i$.

tedy speciálně to platí pro $\vec{w} = \vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}', \vec{v}_3{}'$

Ale $\forall i$ $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i = 1 \quad \big| \frac{d}{dt}$ $\qquad \boxed{i\neq j}$ $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j = 0 \quad \big| \frac{d}{dt}$

$$\boxed{2\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i{}' = 0} \qquad \vec{v}_i{}'\cdot\vec{v}_j + \vec{v}_j{}'\cdot\vec{v}_i = 0$$

$$\vec{v}_i{}'\cdot\vec{v}_j = -\vec{v}_j{}'\cdot\vec{v}_i$$

$$\Rightarrow (\underset{\vec{t}'}{\vec{v}_1{}'}, \vec{v}_2{}', \vec{v}_3{}') = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} 0 & -A & -B \\ A & 0 & -C \\ B & C & 0 \end{pmatrix}$$

Speciálně pro Freneta:

podle 2.22 máme $\vec{t} = c'$ $\qquad \vec{n} = \frac{c''}{\kappa}$

$c'' = \vec{t}\,' = \kappa\cdot\vec{n}$ (1. FREN. VZOREC)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A &= \kappa \\ B &= 0 \end{aligned}}$$

$\vec{v}_2{}'\cdot\vec{v}_3 = \vec{n}\,'\cdot\vec{b}$

Chci, že $C = \tau$

Opravdu: $\vec{n}' \cdot \vec{b} = \left(\frac{c''}{\|c''\|}\right)' \cdot \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|} = \left(\frac{c''}{k}\right)' \cdot \frac{c' \times c''}{k} =$

$$= \frac{k \cdot c''' - k' \cancel{c''}}{k^2} \cdot \frac{c' \times c''}{k} = \frac{1}{k^2} \left(c''' \cdot (c' \times c'')\right) =$$

$$= \frac{\det\left(c' \,|\, c'' \,|\, c'''\right)}{\|c' \times c''\|^2} = \underline{\underline{\tau}}$$

$k = \|c' \times c''\|$