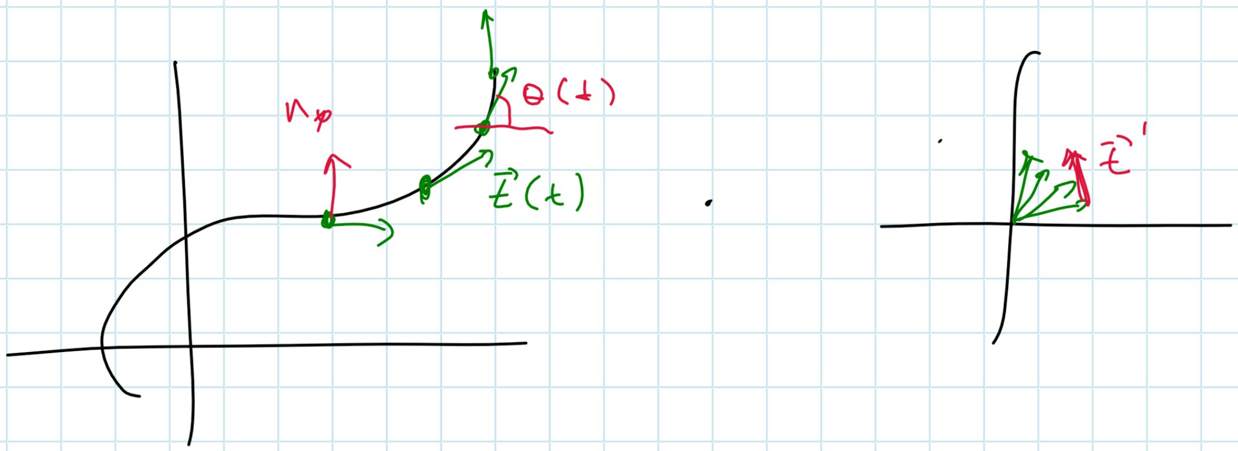
**Věta 2.15.** Pro hladkou regulární parametrickou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathbf{t}'(t) = ||\mathbf{c}'(t)||\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t).$$

Dále platí, že existuje hladká funkce $\theta(t) : I \to \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ pro $t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $\boxed{||\mathbf{c}'(t)|| = 1}$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.




Dk $\quad \vec{t} = \frac{c'}{||c'||} \qquad ||c'|| = \sqrt{c' \cdot c'}$

$$||c'||' = \frac{1}{2}\frac{1}{||c'||} \cdot 2c' \cdot c''$$

$$\vec{t}' = \left(\frac{c'}{||c'||}\right)' = \frac{||c'||\, c'' - \frac{c' \cdot c''}{||c'||} c'}{||c'||^2} = \frac{||c'||^2 c'' - (c' \cdot c'') c'}{||c'||^3}$$

① Tvrdím, že $\vec{t}' \perp c'$, opravdu

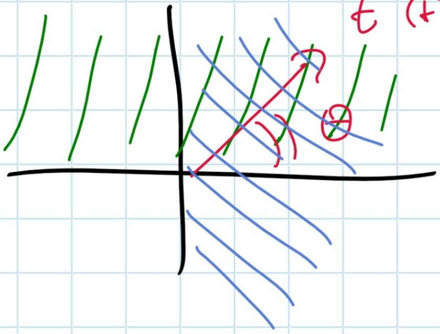
$$\vec{t}' \cdot c' = \frac{1}{||c'||^3}\left(\underbrace{(c' \cdot c') \cdot (c'' \cdot c') - (c' \cdot c'') \cdot (c' \cdot c')}_{=0}\right)$$

$\Rightarrow \vec{t}' = K \cdot n_*$

① $\det(\vec{t} \,|\, \vec{t}') = K \cdot \det(\vec{t} \,|\, \vec{n}_*) = K \qquad ||c'|| \cdot \kappa_z$

$$= \frac{1}{||c'||^3} \frac{1}{||c'||} \det\left(c' \,\middle|\, ||c'||^2 \cdot c'' - \cancel{(c' \cdot c'') c'}\right) = \frac{1}{||c'||^2} \det(c' | c'')$$

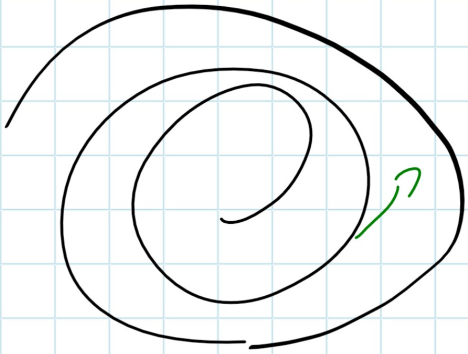
$\vec{t}(t)$ je jednotkový



$\vec{t}'(t) = (f_x(t), f_y(t))$

$\Theta = \arccos f_x(t) + 2k\pi$

$= \arcsin f_y(t) + 2k\pi$



$\Theta(t)$ existuje (viz $\mathbb{C}$-analýza)

$\vec{t}(t) = (\cos\Theta(t), \sin\Theta(t)) \quad \Big| \frac{d}{dt}$

$\vec{t}\,'(t) = \Theta'(t)\cdot \underbrace{(-\sin\Theta(t), \cos\Theta(t))}_{n^*}$

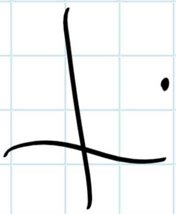
$\| \quad \|c'(t)\|\cdot \kappa_z(t)$.

**Věta 2.16.** Na otevřeném intervalu $I$ budiž zadány dvě hladké reálné funkce $f(t)$, $r(t)$, přičemž $r(t) > 0$ pro $t \in I$. Pak existuje až na přímou shodnost právě jedna hladká parametrická rovinná křivka $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$, pro kterou platí

$$||\mathbf{c}'(t)|| = r(t), \qquad \kappa_z(t) = f(t).$$

$\Theta' = \|c'\|\cdot \kappa_z \qquad \Theta(t) = \int f(t)\cdot r(t)\, dt$

zvolme $t_0 \in I$ a můžeme až zvolit



$\Theta(t_0) = \Theta_0$ výchozí úhel

$\int$ konstanta

Navíc $\vec{t}(t) = (\cos\Theta(t), \sin\Theta(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(t) = \underbrace{\|c'(t)\|}_{r(t)} (\cos\Theta(t), \sin\Theta(t))$

$c(t)$ získáme integrováním ; $\int$ KONSTANTY $\quad c(t_0) = (x_0, y_0)$

**Věta 1.4.** Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

$$d(X, Y) := \|X - Y\|$$

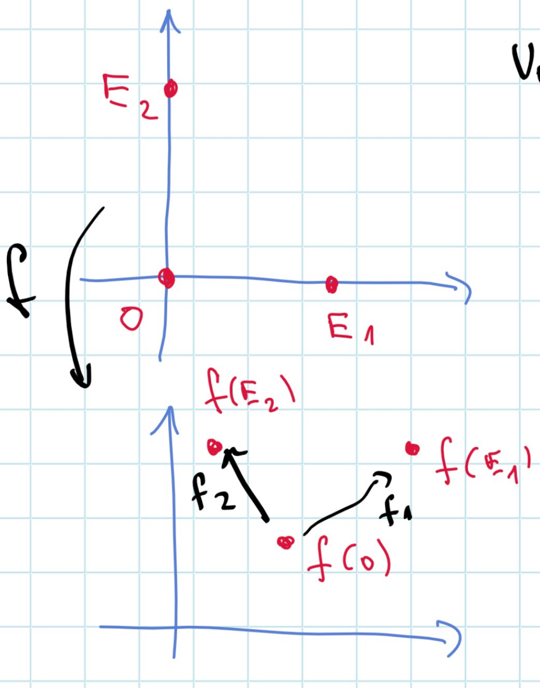
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^T \vec{v}} \leftarrow \text{maticový pohled}$$

<u>Dk</u> ① $f(x) = AX + p$ je shodnost

$$\|f(X) - f(Y)\| = \|AX + p - (AY + p)\| = \|A(X - Y)\| =$$

$$= \sqrt{[A(X-Y)]^T A(X-Y)} = \sqrt{(X-Y)^T \underbrace{A^T A}_{I_n} (X-Y)} = \|X - Y\|.$$

② Naopak, mějme shodnost $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$




Volíme $O = (0, \dots, 0)^T$

$E_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T$ ← $i$-tá pozice

Definuji vektory

$$f_i = f(E_i) - f(O) \qquad i = 1 \dots n$$

snadno dokážeme, že $\|f_i\| = 1$

a že $\|f_i - f_j\| = \sqrt{2}$ pro $i \neq j$

$\Rightarrow \{f_1, \dots, f_n\}$ je ON báze $\mathbb{R}^n$.

Vytvoříme matici $A=(f_1|\dots|f_n)$ a definujeme $p=f(0)$ a definuji $\boxed{g(x)=Ax+p}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[loop, "h"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

platí $g(0)=f(0)$

$$\boxed{g(E_i)=f(E_i)}$$

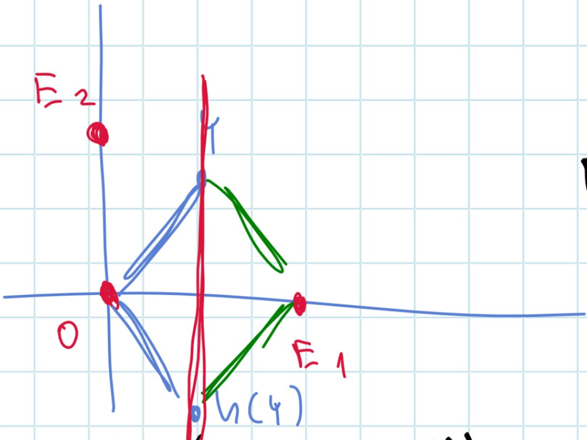
Opravdu

$$g(E_i)=A\cdot E_i+f(0)=$$
$$=f_i+f(0)=f(E_i)-f(0)+f(0)$$
$$=\underline{\underline{f(E_i)}}$$

g má inverz: $g^{-1}(x)=A^TX-A^Tp$ a definuji

$h(x)=g^{-1}\circ f$ a zjevně platí $h(0)=0$, $h(E_i)=E_i$

h je shodnost




$h(Y)=(h_1(Y),\dots,h_n(Y))$

Ukážeme, že h je identita.

Mějme $Y\in\mathbb{R}^n$ $Y=(y_1,\dots,y_n)^T$

$$\|h(Y)-0\|^2=\|h(Y)-h(0)\|^2=\|Y-0\|^2$$

$$h_1^2(Y)+h_2^2(Y)+\dots+h_n^2(Y)=y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2$$

$$\|h(Y)-E_i\|^2=\|Y-E_i\|^2$$

$$h_1^2(Y)+\dots+(h_i(Y)-1)^2+\dots+h_n^2(Y)=y_1^2+\dots+(y_i-1)^2+\dots+y_n^2$$

$$=\quad -2h_i(Y)+1=-2y_i+1$$

$f=g.$ $\Leftarrow$ h je identita $\Leftarrow$ $h_i(Y)=y_i$

**Lemma 1.9.** Přímka $\mathbf{Q} + LO\{\mathbf{v}\}$ je samodružnou množinou shodnosti $f$ právě tehdy, když $LO\{\mathbf{v}\}$ je jeho samodružný směr a $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ je násobkem $\mathbf{v}$.

$$q = Q + LO(\vec{v}) = Q + t\cdot\vec{v} \qquad \vec{v} \neq \vec{o}$$

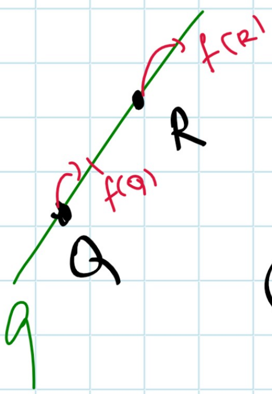
pozorování: Obrazem přímky ve shodnosti je přímka

$$f(x) = AX + p$$

$$f(q) = A(Q + t\cdot\vec{v}) + p = \underbrace{(AQ + p)}_{\text{BOD}} + t\,\underbrace{A\vec{v}}_{\text{vektor}}$$

Dk

na $q$ máme 2 body $Q$; $R = Q + \vec{v}$




$q$ je samodružná $\Leftrightarrow$ $f(Q) \in q$, $f(R) \in q$

$(\Rightarrow)$ $q$ je samodružná $f(Q) \in q$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(Q) = Q + t_Q\cdot\vec{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(Q) - Q = t_Q\cdot\vec{v}} \quad \text{násobek.}$$

navíc

$$A\vec{v} = f(R) - f(Q) = \underbrace{Q + t_R\cdot\vec{v}}_{f(R)} - (\underbrace{Q + t_Q\cdot\vec{v}}_{f(Q)})$$

$$= (t_R - t_Q)\cdot\vec{v}$$

$(\Leftarrow)$ $f(Q) = Q + t_Q\cdot\vec{v} \in q$

$$f(R) = f(Q + \vec{v}) = A(Q + \vec{v}) + p = (\overbrace{AQ + p}^{f(Q)}) + A\cdot\vec{v} =$$

$$= Q + t_Q\cdot\vec{v} + a\cdot\vec{v} = Q + (t_Q + a)\cdot\vec{v} \in q.$$