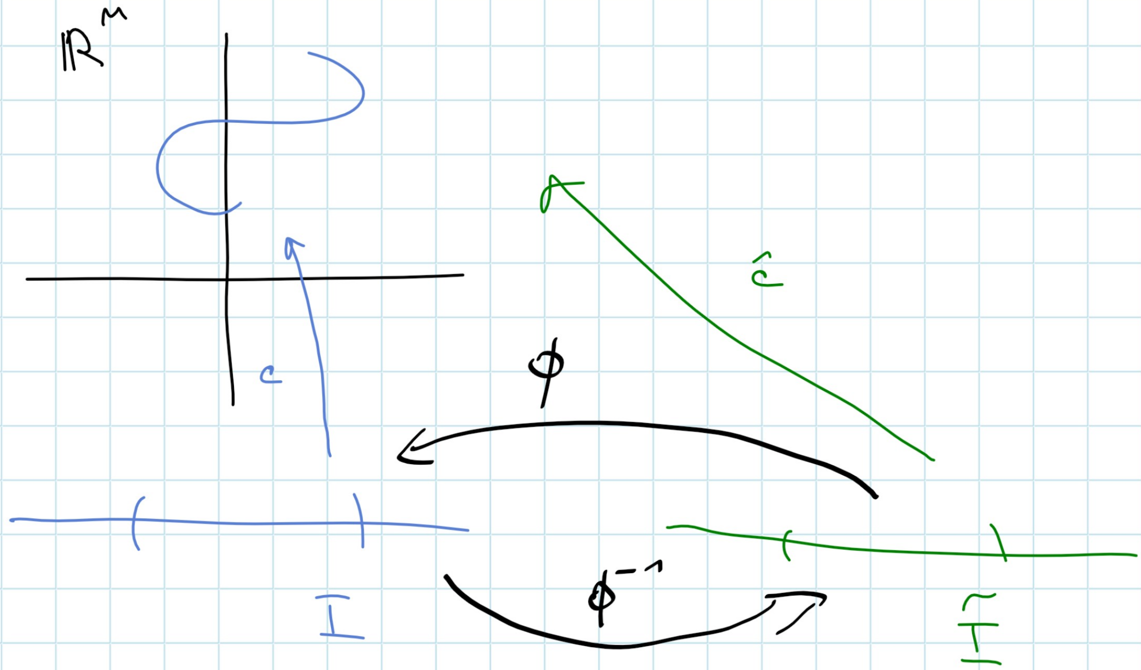
Definice 2.4. Je-li $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrická křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ hladký difeomorfismus intervalu $\tilde{I}$ na I (tedy hladká bijekce s hladkým inverzním zobrazením), je $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako c. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci*.

Definice a lemma 2.5. Býti reparametrizací je relace ekvivalence (kterou označíme $\sim$) na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *křivka*. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme *parametrizací* této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence (kterou označíme $\approx$) na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *orientovaná křivka*.



Dk $\boxed{\sim}$ REF: $c = c \circ id$ $\quad c \sim c$

SYM $\tilde{c} = c \circ \phi \Rightarrow c = \tilde{c} \circ \phi^{-1}$

TRANZ $(\tilde{c} = c \circ \phi) \wedge (\tilde{\tilde{c}} = \tilde{c} \circ \psi) \Rightarrow \tilde{\tilde{c}} = c \circ \underbrace{(\phi \circ \psi)}_{\text{DIFF}}$

$\boxed{\approx}$

$(id)' = 1 > 0$

$(\phi)' > 0 \Rightarrow (\phi^{-1})' > 0$ $\quad = \frac{1}{\phi'}$

$(\phi' > 0) \wedge (\psi' > 0) \Rightarrow (\phi \circ \psi)' = \phi' \cdot \psi' > 0$

Poznámka 2.6. Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem *křivka* (případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz.

Poznámka 2.7. V diferenciální geometrii studujeme vlastnosti křivek, které se při reparametrizaci nemění nebo mění odpovídajícím způsobem (například mění znaménko při změně orientace). Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ budeme její reparametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ označovat jednoduše $\mathbf{c}(s)$. Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například $\mathbf{c}'$ místo $\mathbf{c}'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a tečka derivaci $\frac{d}{ds}$.

Lemma 2.8. Pro derivace dvou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ téže hladké regulární křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\dddot{\mathbf{c}}) = (\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''') \begin{pmatrix} \dot\phi & \ddot\phi & \dddot\phi \\ 0 & \dot\phi^2 & 3\dot\phi\ddot\phi \\ 0 & 0 & \dot\phi^3 \end{pmatrix}.$$

$\phi(s)$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n & \\ I \arrow[ur, "c"] & \circ & \tilde I \arrow[ul, "\tilde c"'] \arrow[ll, "\phi"] \end{tikzcd}$$

$t_0 \in I$, $s_0 \in \tilde I$

$$\text{Dk}\quad \dot c = \frac{d}{ds}\Big|_{s=s_0} \tilde c(s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=s_0} c(\phi(s)) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=\phi(s_0)} c(t)\right)\cdot\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=s_0}\phi(s)\right) = c'\cdot\dot\phi$$

1) $\dot c = c'\cdot\dot\phi \qquad \Big|\frac{d}{ds}$

2) $\ddot c = c'\cdot\ddot\phi + c''\cdot\dot\phi\cdot\dot\phi = c'\cdot\ddot\phi + c''\cdot(\dot\phi)^2 \qquad \Big|\frac{d}{ds}$

3) $\dddot c = c''\cdot\dot\phi\cdot\ddot\phi + c'\cdot\dddot\phi + c'''\cdot\underbrace{\dot\phi\cdot(\dot\phi)^2}_{\dot\phi^3} + c''\cdot 2\dot\phi\cdot\ddot\phi$

Definice 2.9. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^2$ definujeme *jednotkový tečný vektor*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

rotace o $\frac{\pi}{2}$

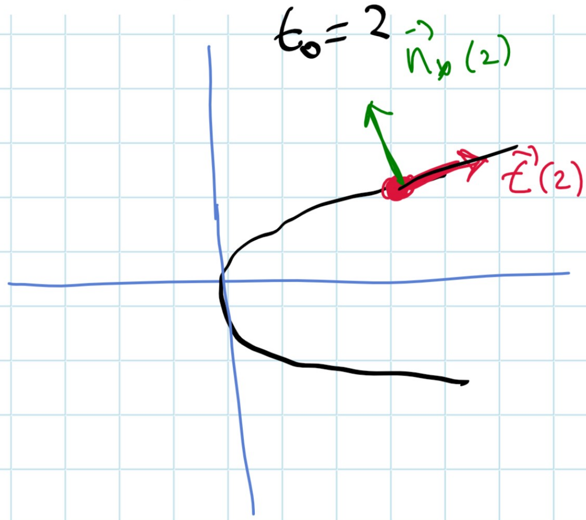
$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t)$$

a znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme inflexní.

$t_0 = 2$



$$c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$c(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c'(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}(2) = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_*(2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{t}(2) = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c''(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa_z(2) = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{(\sqrt{17})^3} = -\frac{2}{(\sqrt{17})^3}$$

$$\kappa_z(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} 2t & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+4t^2}^{\,3}} = -\frac{2}{(\sqrt{1+4t^2})^3} < 0$$

maximum $|\kappa_z(t)|$ je pro $t=0$.

Věta 2.10. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^2$ zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko.

Dk

$c(t)$ $\qquad \tilde{c}(s) = c(\phi(s))$

$$\vec{t}(s) = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|} = \frac{c' \cdot \dot{\phi}}{\|c' \cdot \dot{\phi}\|} = \underbrace{\frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}}_{\operatorname{sign}(\dot{\phi})} \cdot \underbrace{\frac{c'}{\|c'\|}}_{\vec{t}(t)}$$

$$\vec{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{t}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \cdot \vec{t}(t)$$

$$= \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \cdot n_*(t)$$

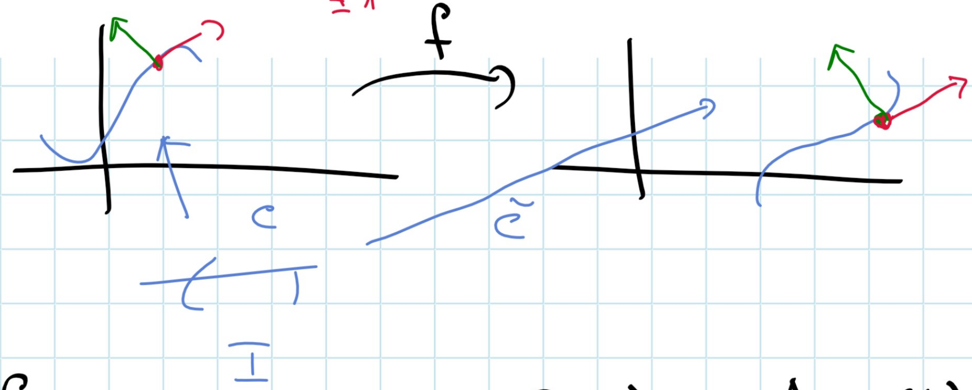
$$\kappa_2(s) = \frac{\det(\dot{c} \mid \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3} = \frac{\det\left[(c' \mid c'') \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}\right]}{\|\dot{\phi} \cdot c'\|^3} =$$

$$= \underbrace{\frac{(\dot{\phi})^3}{|\dot{\phi}|^3}}_{\operatorname{sign} \dot{\phi}} \cdot \frac{\det(c' \mid c'')}{\|c'\|^3} = \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \cdot \kappa_2(t)$$

Věta 2.11. Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ_z, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_*$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = (\det \mathbf{A})\kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{t}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = (\det \mathbf{A})A\mathbf{n}_*$.

$\det A = \pm 1$

$A \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



$$\tilde{c} = f \circ c \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{c}(t) &= A \cdot c(t) + p \\ \tilde{c}' &= A \cdot c' \\ \tilde{c}'' &= A \cdot c'' \end{aligned}$$

$$\tilde{\vec{t}} = \frac{\tilde{c}'}{\|\tilde{c}'\|} = \frac{A \cdot c'}{\|A \cdot c'\|} = A \frac{c'}{\|c'\|} = A\,\vec{t}$$

$$\|A \cdot c'\| = \|c'\|$$

$$\tilde{\vec{n}}_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\vec{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A\,\vec{t} \Rightarrow \det(A) \cdot A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{t}$$

$\det(A) = \pm 1$

$$= \det(A) \cdot (A\,\vec{n}_*)$$

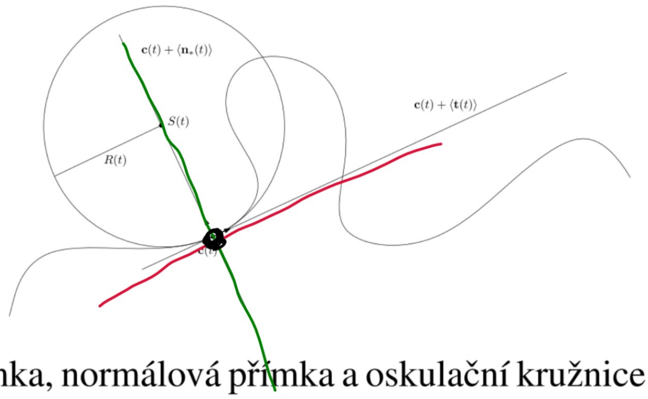
$L(A)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\kappa}_z = \frac{\det(\tilde{c}' | \tilde{c}'')}{\|\tilde{c}'\|^3} = \frac{\det[A \cdot (c' | c'')]}{\|A \cdot c'\|^3} = \det A \frac{\det(c' | c'')}{\|c'\|^3} = (\det A) \cdot \kappa_z$$

Definice 2.12. Pro každou křivku $\mathbf{c}$ definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t)\}$ a *normálovou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{n}_*(t)\}$. Dále v každém neinflexním bodě definujeme její *poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{|\kappa_z(t)|}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa_z(t)}\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.



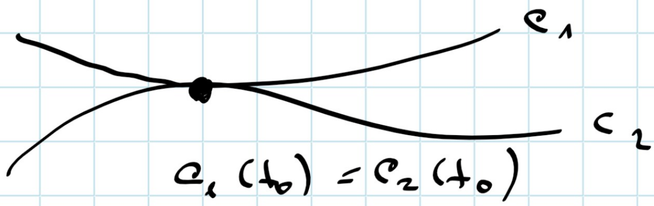
Důsledek 2.13. Tečná přímka, normálová přímka a oskulační kružnice nezávisí na (re)parametrizace a jsou ekvivariantní vůči shodnostem.

$\frac{1}{\kappa_z} \cdot n_*$

sign ϕ sign ϕ

Věta 2.14. Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech kružnic).

Pozn. $c_1(t)$ $c_2(t)$ v ideální pozici.



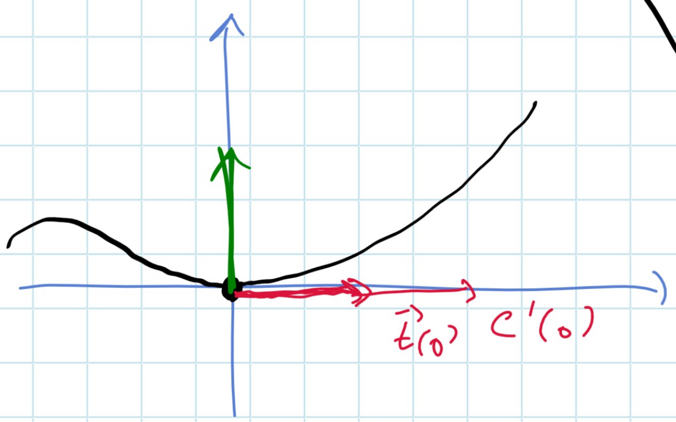
0-kontakt $\iff$ $c_1(t_0) = c_2(t_0)$

1 – " – $\iff$ navíc $c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$

2 – " – navíc $c_1''(t_0) = c_2''(t_0)$

Dk Podle 2.13 BÚNO uvažovat

$\boxed{c(t_0) \text{ pouze pro } t_0 = 0. \quad 2.10}$



$c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c'(0) = \begin{pmatrix} c_x'(0) \\ 0 \end{pmatrix}$

$c_x'(0) > 0$

$\vec{t}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\vec{n}_\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nyní $c(t) = \left(c_x'(0)t + \frac{1}{2} c_x''(0)t^2 + o(t^2),\ \frac{1}{2} c_y''(0)t^2 + o(t^2) \right)$

$$\kappa_2(0) = \frac{\det(c' | c'')}{\|c'\|^3} = \frac{\det\begin{pmatrix} c_x'(0) & c_x''(0) \\ 0 & c_y''(0) \end{pmatrix}}{(c_x'(0))^3} = \frac{c_y''(0)}{c_x'(0)^2}$$

DOSADÍM

Studuj na přímky: $Ax + By + C = 0$

$$C + A\,\overset{\neq 0}{c_x'(0)} \cdot t + \left[\frac{1}{2} A \cdot c_x''(0) + \frac{1}{2} B \cdot c_y''(0)\right] \cdot t^2 + o(t^2) = 0$$

0-kontakt $\Rightarrow$ $C = 0$ // 1-kontakt $\Rightarrow$ $A = 0$ $\Rightarrow$ TEDY přímka $\boxed{y = 0}$ BEST

ZKOUMEJME VŠECHNY KRUŽNICE

dosadím c

$$(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 - R^2 = 0$$

$$\underbrace{\left(S_x^2 + S_y^2 - R^2\right)}_{*} + \left(-2 S_x c_x'(0)\right) \cdot t +$$

$$+ \left[c_x'(0)^2 - 2 \cancel{S_x \tfrac{1}{2} c_x''(0)} - 2 S_y \tfrac{1}{2} c_y''(0)\right] t^2$$

$$+ o(t^2) = 0$$

0 - kontakt $\Rightarrow$ $* = 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ leží na kružnici

1 - kontakt $\Rightarrow$ $S_x = 0$ $\Leftrightarrow$ střed kružnice na ose y

2 - kontakt $\Rightarrow$ $c_x'(0)^2 - S_y c_y''(0) = 0$

$$S_y = \frac{c_x'(0)^2}{c_y''(0)} = \frac{1}{\kappa_z(0)}$$

$$S_x = 0$$

$$R = |S_y| = \left| \frac{1}{\kappa_z(0)} \right| \quad \text{poloměr osk. o}$$

$$S = [S_x, S_y] = \left[0, \frac{1}{\kappa_z(0)}\right]$$