Definice 1.12. Připomeňme si z LA, že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso (označované $\mathbb{H}$) a mají tvar $q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, přičemž $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ a $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. V této přednášce budeme s nazývat skalární část, vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorová část a budeme kvaterniony zapisovat ve tvaru

$$q = (s, \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{v}}). \quad = s + ix + jy + kz$$

Reálná čísla jsou do kvaternionů vnořena jako $s \to (s, \mathbf{0})$ a vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ je do nich vnořen jako $\mathbf{v} \to (0, \mathbf{v})$.

$$(1 + i + 2j + 3k)(2 - i - 4k) =$$
$$= 2 - i - 4k + 2i + 1 + 4j + 4j + 2k - 8i + 6k - 3j + 12 =$$
$$= \underline{\underline{15 - 7i + 5j + 4k}}$$

$$\begin{pmatrix} s & -x & z & -y \\ x & s & y & z \\ -z & -y & s & x \\ y & -z & -x & s \end{pmatrix} \in M_{4\times4}$$

$$i \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i^2 = -1$$

Lemma 1.13 (Geometrický význam kvaternionových operací)**.** Pro libovolné kvaterniony $q_1 = (s_1, \mathbf{v_1})$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v_2})$ platí

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (s_1 + s_2, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) \\ q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} + s_1 \mathbf{v_2} + s_2 \mathbf{v_1}). \end{aligned}$$

$$(1, (\underset{-1}{1}, \underset{0}{2}, \underset{-4}{3})) \cdot (2, (-1, 0, -4)) =$$
$$= (2 - (-13), (-8, 1, 2) + (-1, 0, -4) + 2(1, 2, 3)) =$$
$$= \underline{\underline{(15, (-7, 5, 4))}}$$

Definice 1.14. Pro libovolný kvaternion $q = (s, \mathbf{v})$ definujeme konjugovaný kvaternion $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$ a jeho normu $||q|| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Kvaterniony, které mají normu rovnou 1 nazýváme jednotkové.

$\cong S_3$

Lemma 1.15. Jednotkové kvaterniony (označované $\mathbb{H}_1$) tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha),$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

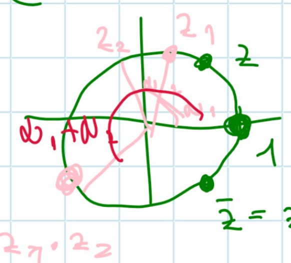
Pomníme na $\mathbb{C}$: $\quad z \to \bar{z} \qquad z \cdot \bar{z} = ||z||^2$

Zkusme $\quad q \cdot \bar{q} = (s, \vec{v}) \cdot (s, -\vec{v}) =$

$$(s^2 + \vec{v} \cdot \vec{v},\ 0 + s \cdot (-\vec{v}) + s(\vec{v})) =$$

$$= (s^2 + x^2 + y^2 + z^2, (0\ 0\ 0)) \in \mathbb{R}_0^+$$

$\mathbb{C}$



podgrupa

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \supset \mathbb{C}_1 \cong S_1$

GRUPA vůči násobení

Dk. 1.15 $\quad \mathbb{H}_1$ je grupa

- 1 má normu $1 \Rightarrow 1 \in \mathbb{H}_1$
- pokud $||q|| = 1 \Rightarrow \bar{q} = q^{-1}$.

  opravdu $\quad q \cdot \bar{q} = 1 = ||q||^2$

- SOUČIN: platí $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$ (SNADNÉ)

  vezmeme $\quad ||q_1|| = ||q_2|| = 1$

  pak $\quad ||q_1 \cdot q_2|| = \sqrt{(q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2})} = \sqrt{q_1 \underbrace{q_2 \bar{q}_2}_{1} \bar{q}_1} =$

  $$= \sqrt{q_1 \cdot \bar{q}_1} = \underline{\underline{1}}$$

Lemma 1.15. Jednotkové kvaterniony (označované $\mathbb{H}_1$) tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha),$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

$\boxed{v \quad \mathbb{C}^1 \quad (\cos\alpha + i\sin\alpha)}$

področ. Dk

$q \in \mathbb{H}_1$ s nulovou vektorovou částí jsou $1, -1$.

Nechť je $q \in \mathbb{H}_1$ s nenulovým $\vec{v}$

$q = (s, \vec{v})$

pak $|s| = \sqrt{\|q\|^2 - \|\vec{v}\|^2} < 1 \Rightarrow s \in (-1, 1)$, kde $\|q\| = 1$, $\|\vec{v}\| > 0$

musí být $\alpha = \arccos s$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\|q\| - s^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sin\alpha$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \qquad q = (s, \vec{v}) = (\cos\alpha, \vec{n}\cdot\sin\alpha).$$

Věta 1.17. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha)$ je lineární zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované jako

$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$

otočení kolem osy $\mathbf{n}$ úhel 2α v kladném směru.

$-q$ stejná rotace jako q

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to (\cos\alpha + i\sin\alpha)\, z$

Příklad 1.18. Vypočítejte vektor, který vznikne otočením vektoru $(1, 0, 0)$ kolem vektoru $\vec{n} = (3, 4, 0)$ o úhel $\phi = \pi/3$ v kladném směru.

$(1,0,0) = i$

Otáčíme okolo $(3,4,0) = 5 \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)}_{\vec{n}}$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \qquad q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3}{10} + j\cdot\frac{4}{10}$$

$$R_{\pi/3}((1,0,0)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3}{10} + j\,\frac{4}{10}\right)\cdot i \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{3}{10} - j\,\frac{4}{10}\right)$$

$$= 0 + \frac{68}{100}\,i + \frac{24}{100}\,j - \frac{2\sqrt{3}}{5}\,k$$

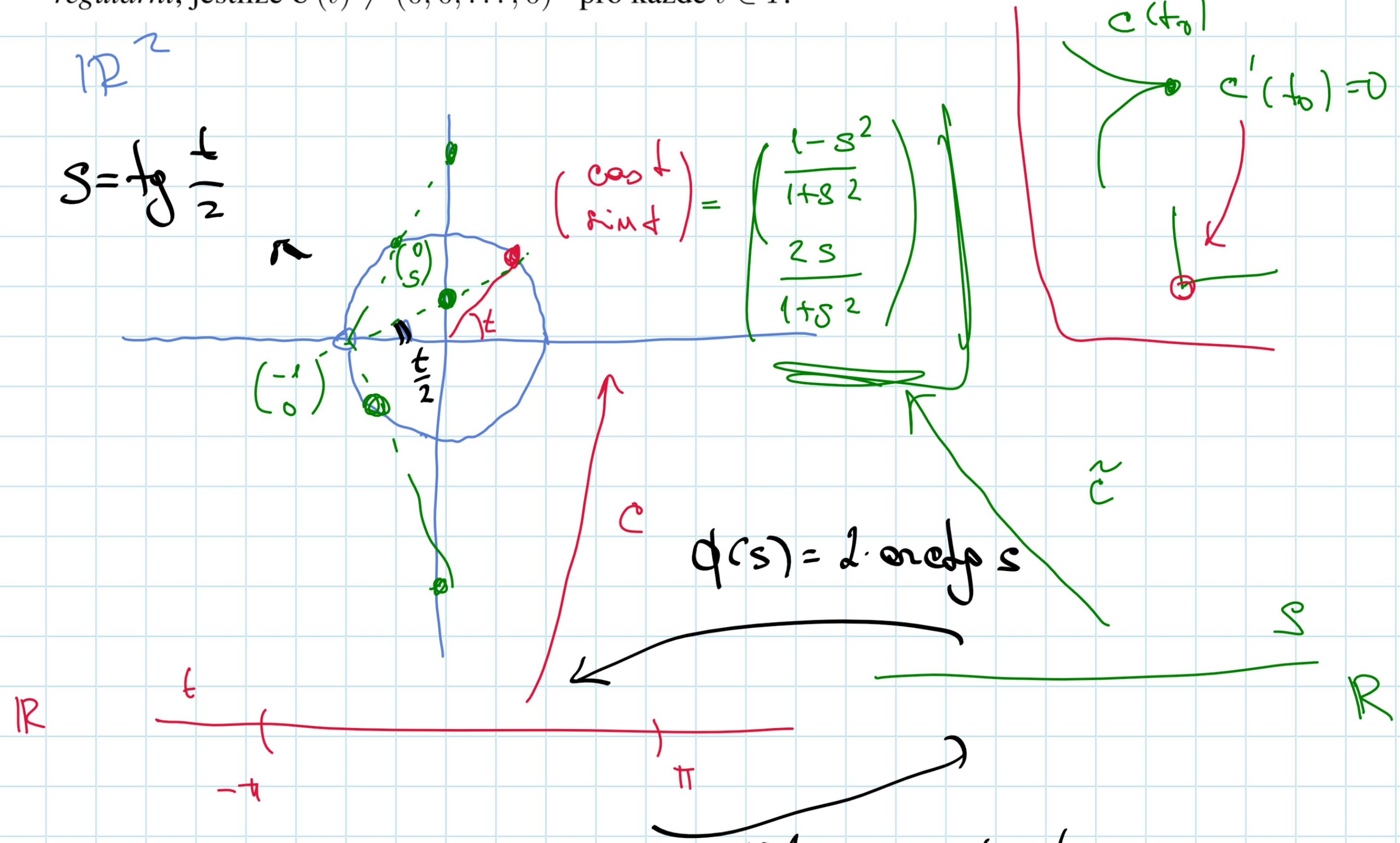
10

$$\left(\frac{68}{100}, \frac{24}{100}, -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$$

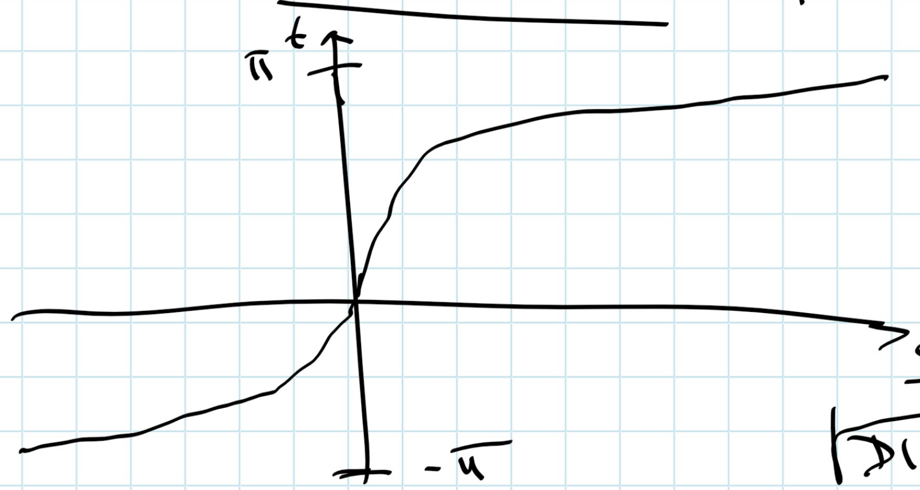
Příklad 2.1. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ jednotkovou kružnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$ bez bodu $(-1, 0)$. Tuto množinu parametrizujme jako $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)^T$ pro $t \in (-\pi, \pi)$ a uvažujme reparametrizaci $\boxed{t = 2 \arctan s}$ pro $s \in (-\infty, \infty)$. Nová parametrizace má tvar

$$\tilde{\mathbf{c}}(s) = \left(\frac{1 - s^2}{1 + s^2}, \frac{2s}{1 + s^2} \right)^T, \qquad s \in (-\infty, \infty).$$

Definice 2.2. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (případně neomezený), spojité zobrazení $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrická křivka* v $\mathbb{R}^n$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrická křivka se nazývá *hladká*, jestliže $\mathbf{c}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ (tedy má spojité derivace všech řádů) a *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ pro každé $t \in I$.



Napr. $\boxed{\cos t = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}}$



$\phi(s)$

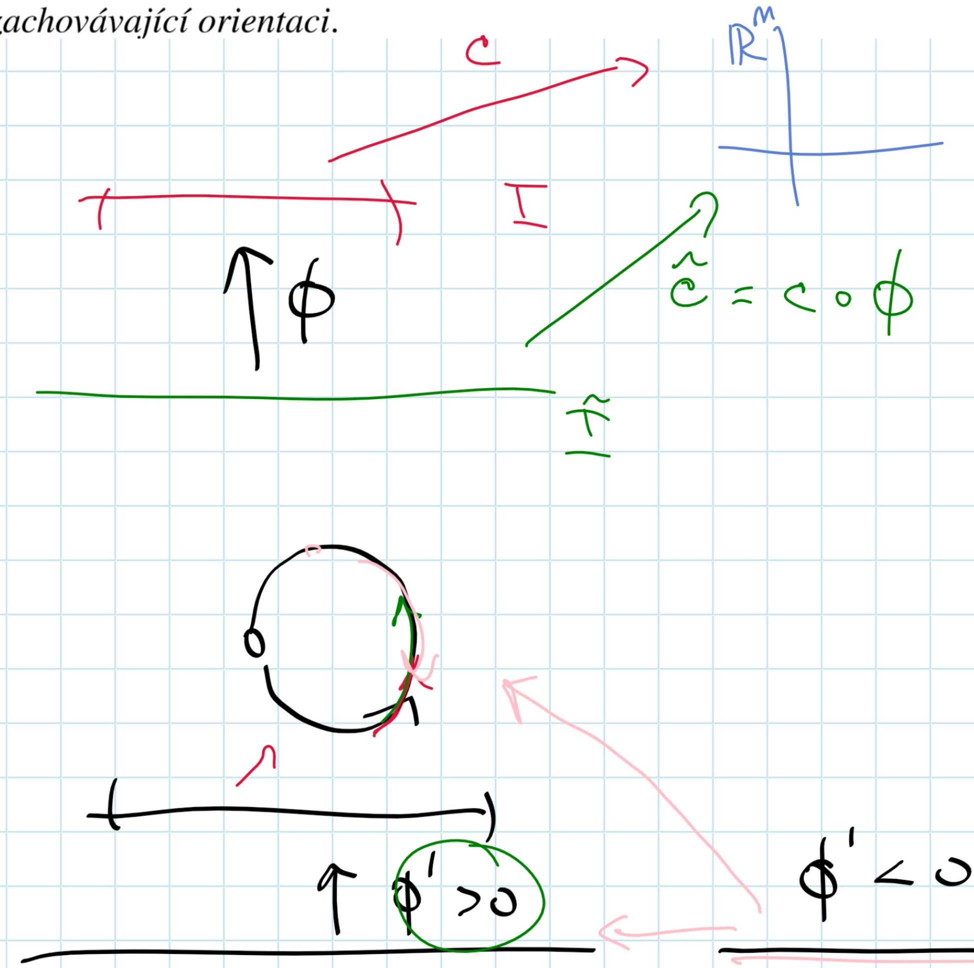
$t = 2 \operatorname{arctg} s$

ϕ ... hladká

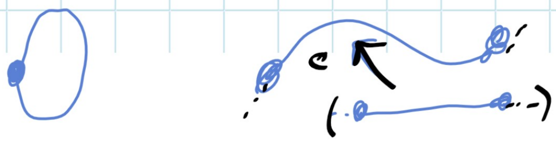
$\phi' > 0$

DIFFEOMORFISMUS

Definice 2.4. Je-li $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrická křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ hladký difeomorfismus intervalu $\tilde{I}$ na I (tedy hladká bijekce s hladkým inverzním zobrazením), je $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako c. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci*.



ϕ hladká bijekce
ϕ^{-1} hladká
$\Downarrow$
ϕ monotónní
$\phi' > 0$
NEBO $\phi' < 0$



Poznámka 2.3.

1. Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme hladkým zobrazením na I restrikci na I hladkého zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu.

2. Parametrická křivka je popsána n-ticí funkcí $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))^T$ jedné proměnné definovaných na I.

3. Její derivace je lineární zobrazení (totální diferenciál), které vyjádříme sloupcovým vektorem (maticí $n \times 1$) a budeme ho chápat jako (tečný) vektor $\mathbf{c}'(t) \in \mathbb{R}^n$, který závisí na parametru. Pro hladkou regulární parametrickou křivku definujeme její funkci rychlosti $||\mathbf{c}'(t)||$, která je hladká a kladná.

4. Ve větách a definicích budeme pro jednoduchost pracovat s hladkými křivkami (třídy $\mathcal{C}^\infty$), ale většina pojmů a výsledků platí i pro nižší třídu hladkosti.