Věta 5.11. Elipsa a hyperbola mají střed, parabola střed nemá. Hyperbola má dvě různé asymptoty, parabola ani elipsa asymptoty nemají. Pro elipsu jsou vždy dva různé směry po dvou sdružené. Pro hyperbolu jsou směry asymptot sdružené vždy samy se sebou a ostatní směry jsou po dvou sdružené. Pro parabolu existuje jeden směr (její nevlastní bod), který je sdružen sám se sebou i se všemi ostatními směry.

Důkaz. Nechť Q je dána symetrickou maticí $B = (b_{ij})$. Parametrické vyjádření nevlastní přímky je $(s, t, 0)$, jestliže ho dosadíme do rovnice kuželosečky, dostaneme homogenní kvadratickou rovnici v s, t

$$b_{11}s^2 + 2b_{12}st + b_{22}t^2 = 0,$$

která má 0, 1 nebo 2 řešení (až na násobek) a tedy kuželosečka má odpovídající počet nevlastních bodů. O tom který z těchto případů nastane přitom rozhoduje signum diskriminantu

$$b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Nyní studujme, kdy je polárou nějakého nevlastního bodu nevlastní přímka $(0, 0, 1)^*$. Nastane to jistě v parabolickém případě, kdy snadno vidíme, že nevlastní přímka je buď polárou bodu $(b_{12}, b_{11}, 0)$, nebo (v případě že $b_{12} = b_{11} = 0$) bodu $(1, 0, 0)$.

Předpokládejme naopak, že polárou nějakého $(s, t, 0)$ je nevlastní přímka $(0, 0, 1)^*$. Pak jistě platí

$$(s, t, 0) \cdot B = (0, 0, \lambda),$$

kde $\lambda \neq 0$. Vzhledem k symetrii matice B z toho vyplývá

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -t^2 & st \\ st & -s^2 \end{pmatrix},$$

kde $\mu \in \mathbb{R}^*$ a tedy jsme v parabolickém případě, přičemž $(s, t, 0)$ je dvojnásobným bodem paraboly. Ve všech ostatních případech je polára nevlastního bodu vlastní přímkou.

Vidíme tedy, že pól nevlastní přímky je vlastní v případě elipsy a hyperboly, které tedy mají střed. V případě paraboly je tento pól nevlastní a tedy parabola střed nemá.

Okamžitě také dostáváme tvrzení o asymptotách, které jsou definovány jako vlastní tečny v nevlastním době. Elipsa žádné nevlastní body nemá. Parabola má jeden nevlastní bod, ale jeho polára (tečna) je nevlastní. Hyperbola má dva nevlastní body a jejich poláry jsou vlastní, tedy jsou to tečny a asymptoty.

Definice 5.12 (Eukleidovské pojmy pro kuželosečky)**.** V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ s kanonickým skalárním součinem mějme regulární kuželosečku Q. Směr (nevlastní bod) nazýváme hlavní, jestliže existuje směr sdružený, který je na něj kolmý. Osu kuželosečky definujeme jako poláru hlavního směru, pokud tato polára není nevlastní přímkou. Vrcholy kuželosečky definujeme jako vlastní průsečíky os s kuželosečkou. Úsečka spojující střed a vrchol se nazývá poloosa.

Věta 5.13 (Bez důkazu)**.** Pro kružnici je každý bod jejím vrcholem. Elipsa, která není zároveň kružnicí má čtyři vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Hyperbola má dva vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Parabola má jeden vrchol a jednu osu, která prochází vrcholem a nevlastním bodem paraboly. Tečna ke kuželosečce v jejím vrcholu má vždy hlavní směr.

Věta 5.14. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme různé body A, B, C, D ležící na jedné přímce. Pak pro dvojpoměry a dělící poměry platí

1. Jestliže jsou všechny tyto body vlastní, pak
$$(A,B,C,D) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}.$$
2. Jestliže D je nevlastní,pak
$$(A,B,C,D) = -\frac{AC}{CB}.$$
3. Speciálně, pokud je (A,B,C,D) harmonická čtveřice a bod D je nevlastní, pak C je středem AB.

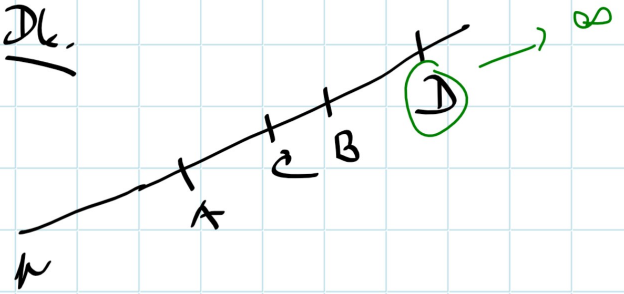
$= -1$

$\frac{AC}{CB} = -1$

$\Downarrow$

C je střed AB

Dk.



$A = (a_x, a_y, 1)$

$B = (b_x, b_y, 1)$

$C = (c_x, c_y, 1)$

$D = (d_x, d_y, 1)$

1) (A,B) je barycentrické souřadnice na p

$c_1 + c_2 = 1$

$C = c_1 A + c_2 B$ $\qquad$ $D = d_1 A + d_2 B$

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

$\frac{AC}{CB} = \frac{c_2}{c_1}$ $\qquad$ $\frac{AD}{DB} = \frac{d_2}{d_1}$

$\Rightarrow$ $(c_x, c_y, 1) = c_1(a_x, a_y, 1) + c_2(b_x, b_y, 1)$ $\qquad$ $c_1 + c_2 = 1$

$(d_x, d_y, 1) = d_1(\text{—"—}) + d_2(\text{—"—})$

$(A,B,C,D) = \frac{d_1 c_2}{d_2 c_1} = \frac{AC}{CB} \Big/ \frac{AD}{DB}$. 13

2) D je nevlastní, pak $D = (b_x - a_x, b_y - a_y, 0)$

$B - A$ je směrový vektor přímky

$$D = (b_x - a_x, b_y - a_y, 0) = -1\,(a_x, a_y, 1) + 1\,(b_x, b_y, 1)$$

$C =$ jako dříve $\quad c_1 \qquad c_2$

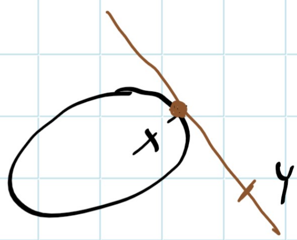
$$(A, B, C, D) = \frac{c_2 \quad (-1)}{c_1 \quad 1} = -\frac{c_2}{c_1} = \underline{\underline{-\frac{AC}{CB}}}.$$

Lemma 5.15 (Obahjoba definice tečny)**.** Nechť Q je regulární projektivní kuželosečka v reálné projektivní rovině a $X \in Q$ její bod. Pak tečna p_X má s Q v bodě X dvojnásobný průsečík. Jiný průsečík tedy s Q mít nemůže.

Def. Tečna je p_X když $X \in Q$. $\dashrightarrow$ $b(\cdot,\cdot) = Q$ je sym. bil. forma Q

X, Y polárně sdružené

Dk.



p_X

$t = 0 \Rightarrow \underline{\underline{X}}$

Uvažujme parametrizaci p_X: $\boxed{s \cdot X + t \cdot Y}$

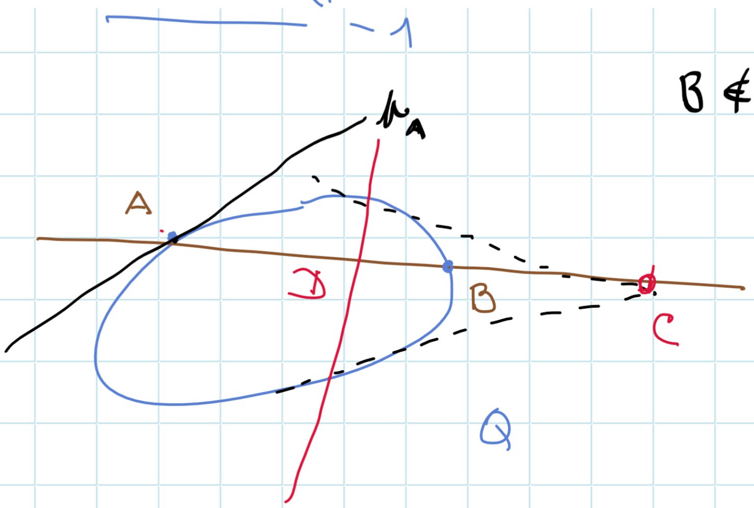
$p_X \cap Q$: $\quad b(sX + tY, sX + tY) = 0$

$$s^2 \underbrace{b(X,X)}_{=0} + 2st \underbrace{b(X,Y)}_{=0} + t^2 b(Y,Y) = 0$$

$$\underline{t}^2 \underbrace{b(Y,Y)}_{\neq 0} = 0$$

$t = 0$ je dvojnásobný kořen

Lemma 5.16. V projektivní rovině $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ mějme regulární kuželosečku Q. Nechť přímka p protíná Q ve dvou různých bodech A, B. Nechť $C \in p$ různé od A, B a nechť $D \in p$ je polárně sdružen s C. Pak (A, B, C, D) tvoří harmonickou čtveřici.



$B \notin p_A \Rightarrow b(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$

S. BIL. forma

$\Downarrow$

$Q: \quad b(\cdot, \cdot) = 0$

Dk.

$A = \mathrm{Lo}\{\vec{a}\} \quad B = \mathrm{Lo}\{\vec{b}\} \quad C = \mathrm{Lo}\{\vec{c}\} \quad D = \mathrm{Lo}\{\vec{d}\}$

$$\vec{c} = c_1 \cdot \vec{a} + c_2 \cdot \vec{b}$$

$$\vec{d} = d_1 \cdot \vec{a} + d_2 \cdot \vec{b}$$

$$\underset{C, D \text{ sdružené}}{0} = b(c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b}, d_1 \vec{a} + d_2 \vec{b}) = c_1 d_1 \overbrace{b(\vec{a}, \vec{a})}^{0} + c_2 d_2 \overbrace{b(\vec{b}, \vec{b})}^{0} + (c_1 d_2 + c_2 d_1) \underbrace{b(\vec{a}, \vec{b})}_{\neq 0}$$

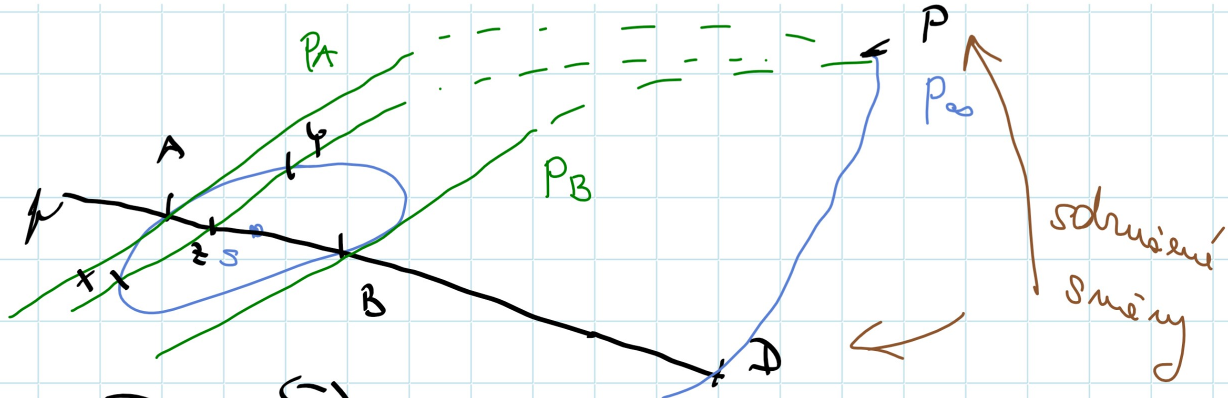
$$\Rightarrow \quad c_1 d_2 = -c_2 d_1$$

$$(A, B, C, D) = \frac{d_1 c_2}{d_2 c_1} = \underline{\underline{-1}}$$

$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$

Věta 5.17. Nechť přímka p prochází středem S kuželosečky Q (elipsy nebo hyperboly) a protíná kuželosečku ve dvou různých bodech A, B. Pak S je středem úsečky AB. Tečny ke Q v bodech A, B jsou rovnoběžné a mají směr sdružený se směrem p. Jestliže má přímka se směrem sdruženým k p s kuželosečkou Q dva průsečíky X, Y, pak přímka p půlí úsečku XY.

Dk



Definuji $D \in \overleftrightarrow{AB}$ jako nevlastní bod

D, S jsou polárně sdružený

podle V 5.16 $\Rightarrow$ $(A, B, S, D) = -1$

$\Rightarrow$ podle 5.13. 3) S je středem AB.

=

P definuji jako pól $p = \overleftrightarrow{AB}$

$A \in p \Rightarrow p_A$ musí procházet P
(tečna)

p_B taky

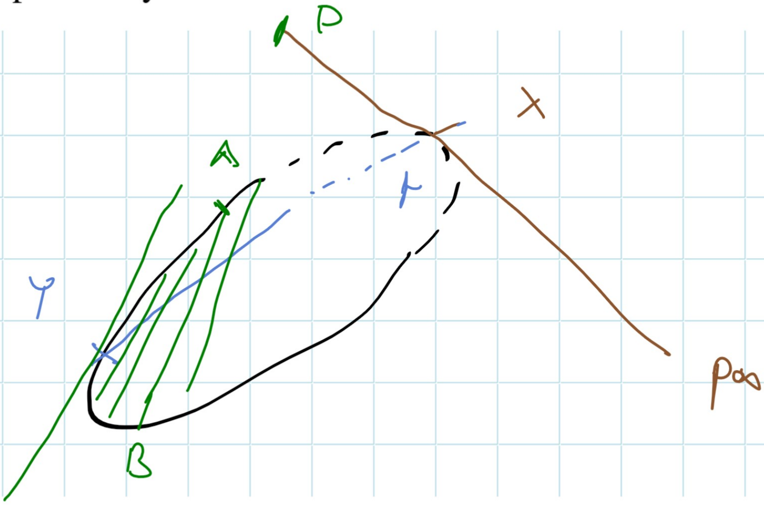
$Z := p \cap \overleftrightarrow{XY}$: P, Z jsou polárně sdružené,

ale P nevlastní $\Rightarrow$ Z je střed X, Y

$\blacksquare$

Věta 5.18. Nechť vlastní přímka p prochází jediným nevlastním bodem X paraboly a protíná ji v dalším (vlastním) bodě Y. Nechť přímka rovnoběžná s tečnou v bodě Y protíná parabolu ve dvou bodech A, B. Pak přímka p půlí úsečku AB.

Důkaz. Podobně jako v důkazu věty 5.17 prochází tečna pólem P přímky p a ze stejných důvodů přímka p půlí tětivy rovnoběžné s touto tečnou.



Věta 5.19. Uvažujme kanonicky projektivně rozšířený afinní prostor T^n. Projektivní transformace uvažovaná na vlastních bodech mají tvar lineárních lomených zobrazení. Afinity tvoří podgrupu projektivních transformací a jsou to právě ta zobrazení, které vlastní body zobrazují na vlastní body a nevlastní body na nevlastní body.

Důkaz. Větu dokážeme v rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$. Analogie pro vyšší dimenze a jiná tělesa pak bude zřejmá. Projektivní transformaci popišme regulární maticí F a zobrazme nějaký vlastní bod $(x, y, 1)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}} \\ \frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a_{31} = a_{32} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

nu tvaru afinních zobrazení

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

Příklad 5.20. Zkoumejte lineární lomená zobrazení, například

$$f(x) = \frac{2x+3}{4x+5},$$

z hlediska analýzy a z hlediska projektivních zobrazení na přímce.

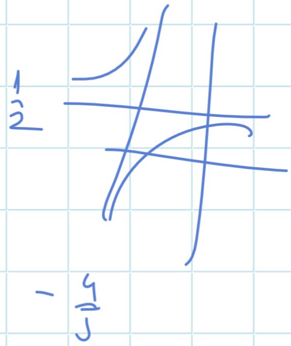
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

ANALÝZA

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{4}\}$

$H_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$f: D_f \to H_f$ bijekce



Proj. geom.:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

regulární $\Rightarrow$ bijekce $\mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

jediný nevlastní bod

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Poznámka 5.21 (Meta-věta o projektivních, afinních a eukleidovských pojmech)**.** Projektivní zobrazení zachovávají (správně zobrazují) projektivní pojmy, afinní zobrazení zachovávají afinní pojmy a shodnosti zachovávají eukleidovské (na skalárním součinu závisející) pojmy.

Věta 5.22 (Příklad afinně zachovaného pojmu)**.** V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme elipsu Q se středem S. Jestliže F je afinita, pak $F(Q)$ je opět elipsa a $F(S)$ je jejím středem.

Důkaz. Elipsa v rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ nemá žádný nevlastní bod. Podle Věty 5.19 F zobrazuje vlastní body na vlastní a nevlastní na nevlastní, takže $F(p_\infty) = p_\infty$ a $F(Q) \cap p_\infty = \emptyset$. Obraz elipsy proto nemá žádný nevlastní bod a je to opět elipsa. Označme b bilineární formu původní elipsy. Pak bilineární forma jejího obrazu je dána jako $\bar{b}(X,Y) = b(F^{-1}(X), F^{-1}(Y))$.

Je-li S středem Q, pak pro každý $X \in p_\infty$ platí $b(X,S) = 0$ a dostáváme tedy, že i pro každý $Y \in p_\infty$

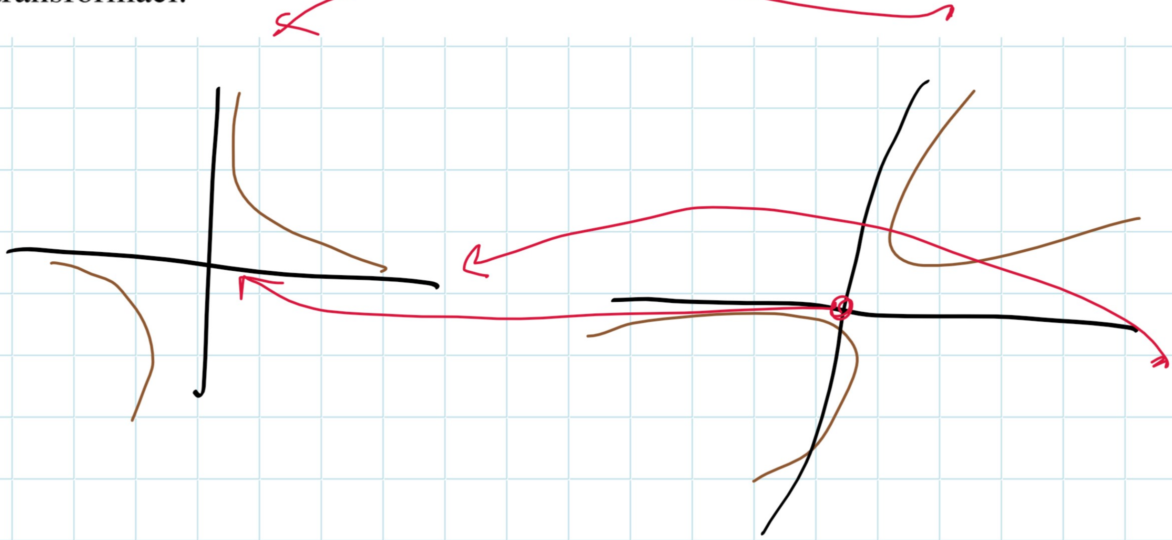
$$\bar{b}(F(S), Y) = b(S, F^{-1}(Y)) = 0,$$

protože $F^{-1}(Y) \in p_\infty$. $F(S)$ je proto skutečně středem $F(Q)$. $\square$

Věta 5.23. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ platí, že

1. každá elipsa je afinní transformací elipsy $x^2 + y^2 - 1 = 0$,
2. každá parabola je afinní transformací paraboly $x^2 - y = 0$,
3. každá hyperbola je afinní transformací hyperboly $xy - 1 = 0$.

V důsledku jsou tedy každé dvě kuželosečky stejného afinního typu mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.



Definice a lemma 5.24 (Projektivní a afinní klasifikace kvadrik v prostoru)**.** V projektivně rozšířeném prostoru $\mathbb{R}^3$ definujeme tyto afinní typy regulárních kvadrik

1. *elipsoid* jako nepřímkovou kvadriku, která nemá žádný nevlastní bod,
2. *eliptický paraboloid*, jako nepřímkovou kvadriku, která má právě jeden nevlastní bod,
3. *dvojdílný hyperboloid* jako nepřímkovou kvadriku, jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku
4. *jednodílný hyperboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku
5. *hyperbolický paraboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří dvě přímky.

Každé dvě kvadriky stejného afinního typu jsou mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

Důkaz. Afinní klasifikace plyne z výčtu všech možností polohy nevlastní roviny (sečná, tečná, mimo) vůči kvadrice. Přímková kvadrika nemůže mít neprázdný průnik s žádnou rovinou, proto je tříd jen 5. Existenci transformací dokazovat nebudeme.