Definice 5.1. Mějme n-dimenzionální afinní prostor A se zaměřením V^n nad tělesem T a $(n+1)$-dimenzionální afinní prostor B se zaměřením V^{n+1} nad stejným tělesem a prosté afinní zobrazení $\varphi : A \to B$ a bod $\mathbf{P} \in B \setminus Im(\varphi)$. Pak je zobrazení $\Phi : A \to \mathbb{P}(V^{n+1})$ zadané předpisem

$$\Phi(\mathbf{X}) := LO\{\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{P}\},$$

prosté a nazývá se *vnoření* A do projektivního prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1})$.

$\Phi : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$

$[x, y] \longrightarrow (x, y, 1)$

$ x_1 \; x_2 \; x_3$

$\underline{\overline{\mathbb{P}^2}}$:

$p_1 : \quad (3, 2, 5)^*$

$p_2 : \quad (3, 2, -4)^*$

$p_1 \cap p_2 = (-2, 3, 0) = (1, -\frac{3}{2}, 0)$

$p_1 : \quad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$

$3x + 2y + 5 = 0$

$p_2 :$

$3x + 2y - 4 = 0$

$[x, y] \longrightarrow (1, x, y)$

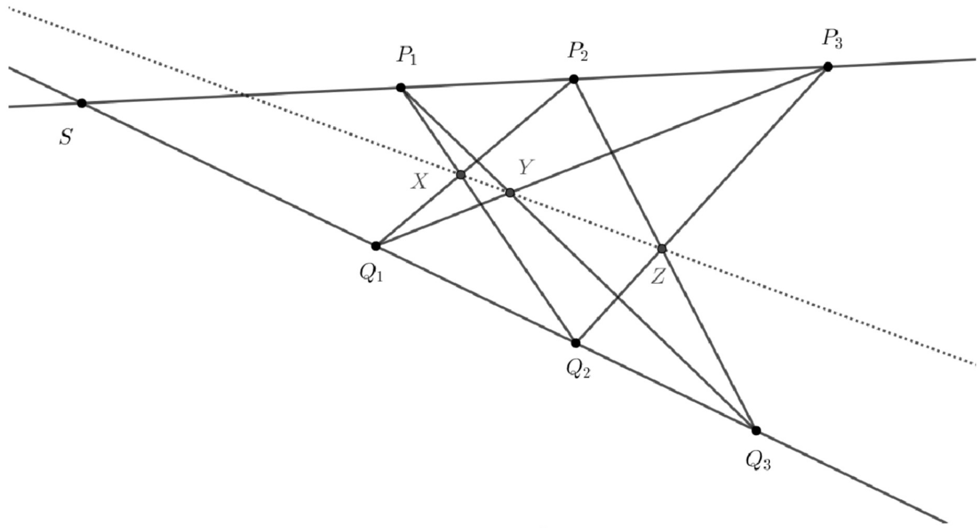
$p_1 : \quad 3 + 2x + 5y = 0$

$p_2 : \quad 3 + 2x - 4y = 0$

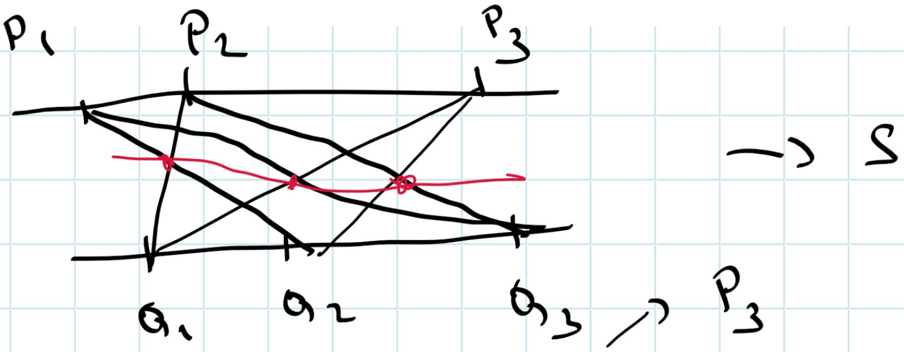
$p_1 \cap p_2 = [-\frac{3}{2}, 0]$

$[x, y] \longrightarrow (2x - 7y + 2, x + y, x - y)$

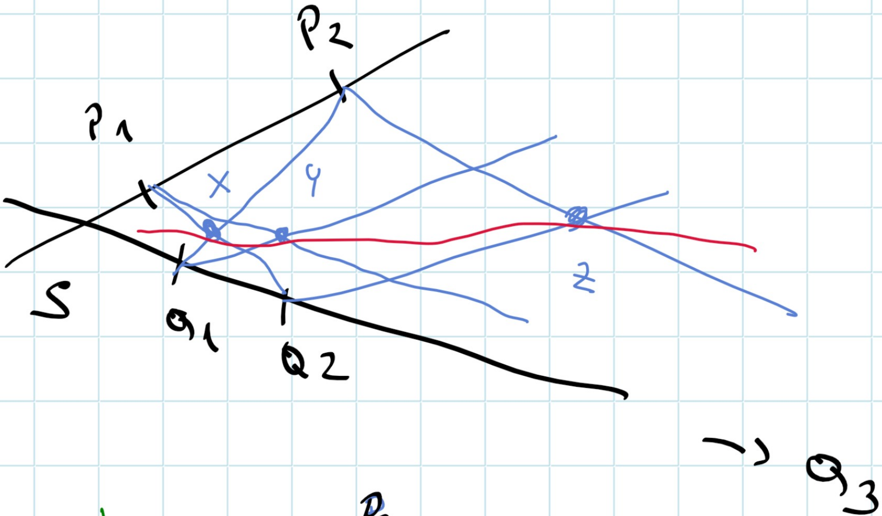
1


P_1
P_2
P_3
S
X
Y
Z
Q_1
Q_2
Q_3

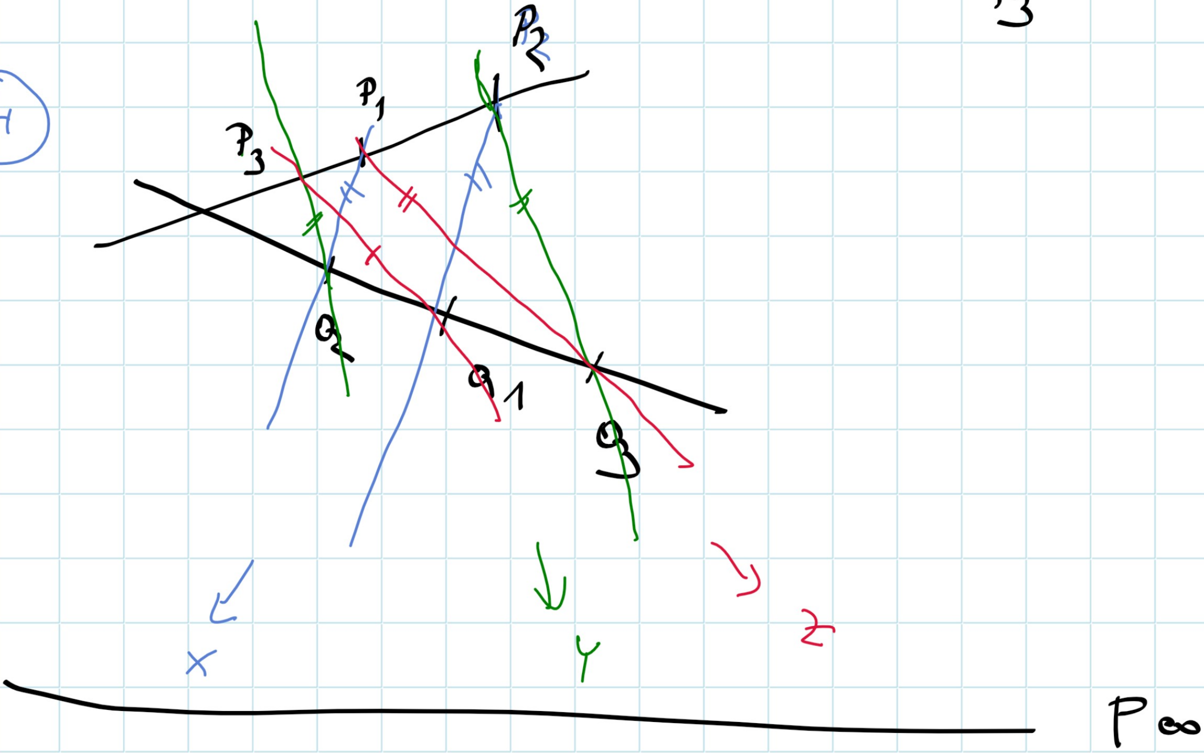
2


P_1
P_2
P_3
$\to S$
Q_1
Q_2
$Q_3 \to P_3$

3


P_2
P_1
X
Y
Z
S
Q_1
Q_2
$\to Q_3$

4


P_2
P_1
P_3
Q_2
Q_1
Q_3
X
Y
Z
P_∞

Věta 4.18. Každá regulární kuželosečka v reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je projektivní transformací kuželosečky dané rovnicí

Q

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Každá regulární kvadrika v reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je projektivní transformací právě jedné z kvadrik

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0 \qquad \text{(nepřímková kvadrika)} \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 0 \qquad \text{(přímková kvadrika).} \end{aligned}$$

Dk. v $\mathbb{P}^2$ kuželosečka $\Rightarrow$ sym. bilineární forma B

B má signaturu BÚNO sign. $\boxed{B = (0,2,1)}$

regularity

LA $\Rightarrow$ existuje P regulární :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^T B P$$

$\Rightarrow$ neprázdná množina nelze $(0,3,0)$, $(0,0,3)$

(např. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ je prázdná množina)

$$(0,2,1) \overset{B \leftrightarrow (-B)}{\longleftrightarrow} (0,1,2)$$

Definuji:

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}.$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in K$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(x_1\, x_2\, x_3)\; P^T}\, B\, \boxed{P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = 0 \iff \underbrace{P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} \in Q$$

$\Rightarrow \quad Q = P(K) \quad$ (obraz K v P)

projektivní zobrazení.

Definice 5.8 (Afinní pojmy pro kvadriky)**.** Nechť $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n, pak

1. O množině $\tilde{Q} \subset T^n$ řekneme, že je to regulární afinní kvadrika, jestliže to je množina vlastních bodů regulární kvadriky Q v $\mathbb{P}^n$. O Q hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění $\tilde{Q}$ a o $\tilde{Q}$ hovoříme jako o afinní verzi Q. Nevlastní body Q považujeme i za nevlastní body $\tilde{Q}$.

2. Tečné nadroviny ke $\tilde{Q}$ definujeme jako afinní verze tečných nadrovin ke Q ve vlastních bodech.

3. Jestliže je pól nevlastní nadroviny p_∞ vlastním bodem, pak jej nazýváme středem kvadriky $\tilde{Q}$.

4. Jestliže má kvadrika v nevlastním bodě tečnou nadrovinu, která není nevlastní, nazýváme tuto nadrovinu asymptotickou k $\tilde{Q}$.

Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme stejným písmenem označovat afinní objekt (nadrovinu, kvadriku, prostor) a jeho projektivní zúplnění.

Definice 5.9 (Afinní klasifikace kuželoseček)**.** V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme regulární kuželosečku Q. Řekneme o ní, že to je *elipsa*, jestliže nemá žádný nevlastní bod, *parabola*, jestliže má právě jeden nevlastní bod a *hyperbola*, jestliže má dva nevlastní body, jiné možnosti nejsou. Těmto názvům říkáme *afinní typ* kuželosečky. O dvou vlastních přímkách řekneme, že mají sdružené směry, jestliže jsou jejich nevlastní body polárně sdružené vůči Q.

Příklad 5.10. Všechny pojmy si postupně vyzkoušejme na afinní kuželosečce

$$x^2 + 2xy - 2y + 2 = 0.$$

Věta 5.11. Elipsa a hyperbola mají střed, parabola střed nemá. Hyperbola má dvě různé asymptoty, parabola ani elipsa asymptoty nemají. Pro elipsu jsou vždy dva různé směry po dvou sdružené. Pro hyperbolu jsou směry asymptot sdružené vždy samy se sebou a ostatní směry jsou po dvou sdružené. Pro parabolu existuje jeden směr (její nevlastní bod), který je sdružen sám se sebou i se všemi ostatními směry.

$[A], [B] \in p_\infty \cap Q$

Dk. Nevl. bod

Homogenní rovnice st. 2

$$(s, t, 0) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = b_{11}s^2 + 2b_{12}st + b_{22}t^2 = 0$$

$t \neq 0$, $\frac{s}{t} = \alpha$, $| \frac{1}{t^2}$

$$b_{11}\left(\frac{s}{t}\right)^2 + 2b_{12}\left(\frac{s}{t}\right) + b_{22} = 0$$

Pomocné tvrzení: $X \in p_\infty$, pak jeho poláre p_X je nevlastní $\Leftrightarrow$ $X \in Q$ a je to jediný (dvojnásobný) bod.

$$D = (2b_{12})^2 - 4b_{11}b_{22} = 4(b_{12}^2 - b_{11}b_{22}) = -4 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Dk. $p_X = p_\infty \Rightarrow X \in p_X \Rightarrow X \in Q$.

zkusme: $X = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad p_X = p_\infty = (0, 0, 1)^*$

$$(s, t, 0) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} = (0, 0, \alpha)^* \qquad t \neq 0$$

$b_{11} = -\mu \cdot t$, $b_{12} = \mu \cdot s$

$$b_{22} = -\mu \cdot \frac{s^2}{t}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -t & s \\ s & -\frac{s^2}{t} \end{pmatrix}$$

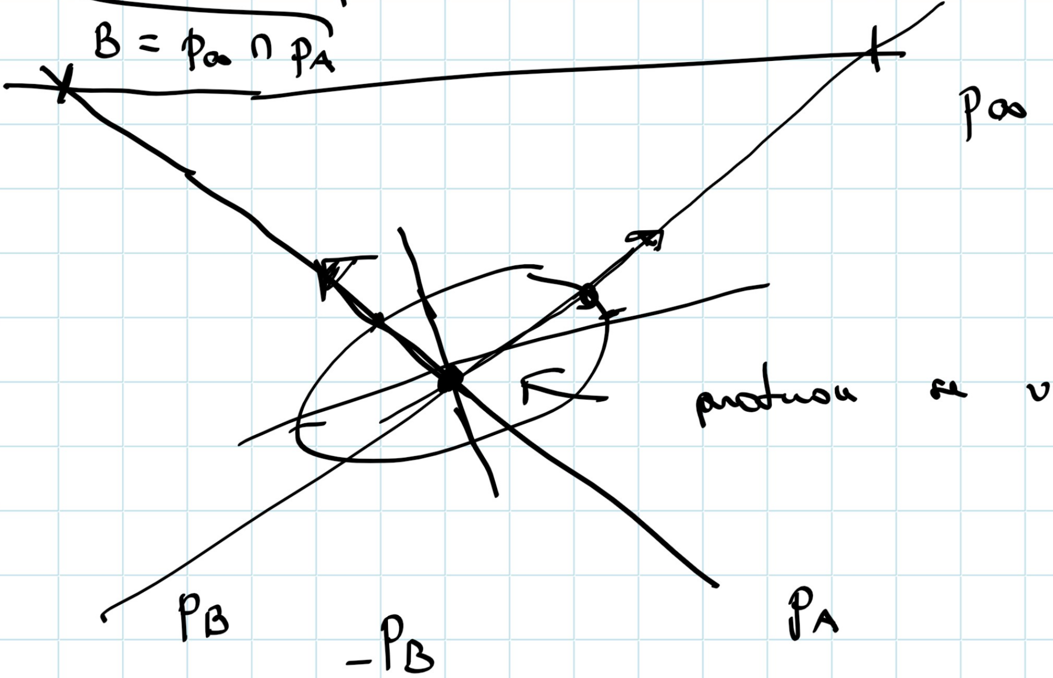
$$\begin{vmatrix} -t & s \\ s & -\frac{s^2}{t} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ existuje jediné dvojnásobné řešení.

$\Leftrightarrow$ parabola.

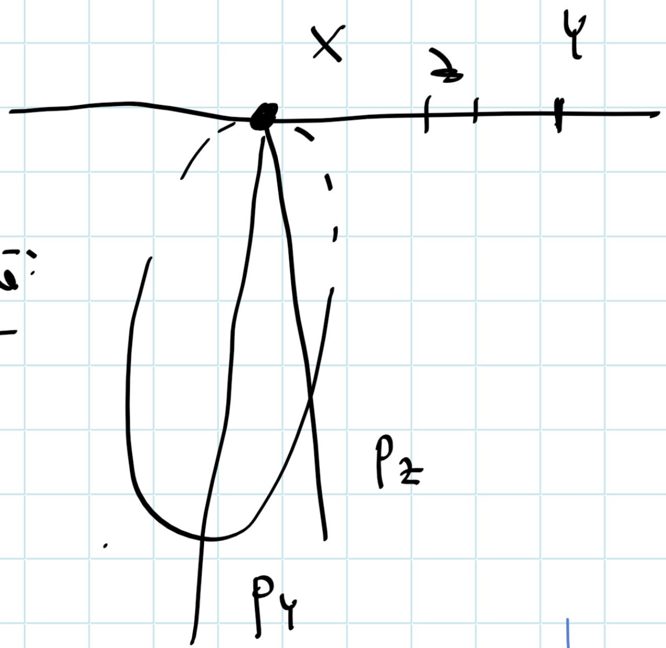
Nepr. elipsa

$B = p_\infty \cap p_A$



protnou se ve vlastním

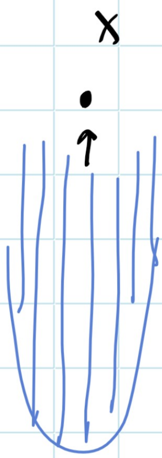
Parabola

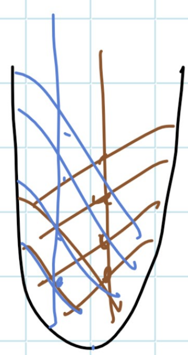


$p_X = p_\infty$

$Y \in p_X$

projektivně:





Definice 5.12 (Eukleidovské pojmy pro kuželosečky)**.** V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ s kanonickým skalárním součinem mějme regulární kuželosečku Q. Směr (nevlastní bod) nazýváme hlavní, jestliže existuje směr sdružený, který je na něj kolmý. Osu kuželosečky definujeme jako poláru hlavního směru, pokud tato polára není nevlastní přímkou. Vrcholy kuželosečky definujeme jako vlastní průsečíky os s kuželosečkou. Úsečka spojující střed a vrchol se nazývá poloosa.

Věta 5.13 (Bez důkazu)**.** Pro kružnici je každý bod jejím vrcholem. Elipsa, která není zároveň kružnicí má čtyři vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Hyperbola má dva vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Parabola má jeden vrchol a jednu osu, která prochází vrcholem a nevlastním bodem paraboly. Tečna ke kuželosečce v jejím vrcholu má vždy hlavní směr.