Definice 4.9. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a kvadratickou formu q na V^{n+1}. Neprázdnou množinu

$$Q = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, q(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\} \subset \mathbb{P}(V^{n+1})$$

nazveme projektivní kvadrikou. Tuto kvadriku nazýváme regulární, jestliže je forma q regulární, tedy má hodnost $n+1$. Kvadriky v projektivní rovině nazýváme též kuželosečky.

Definice 4.10. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm kvadriku Q danou kvadratickou formou q a nechť b je příslušná symetrická bilineární forma, tedy $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Řekneme, že dva body $X = LO(\mathbf{v})$, $Y = LO(\mathbf{w})$ jsou polárně sdružené, jestliže $b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

Lemma 4.11 (O polaritě)**.** Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm regulární kvadriku Q. Pak

Dk. zvolím bázi V^{n+1} a dokazuji v souřadnicích

1. Body sdružené s libovolným bodem $X \in \mathbb{P}(V^{n+1})$ tvoří nadrovinu, kterou nazveme *polára* k X a označíme p_X.

   X sdruženo s Y $\Leftrightarrow$ $\underbrace{X^T B}_{p_X} Y = 0$ řádek $\to$ lineární forma $\neq 0$

   $\Leftrightarrow$ $Y \in p_X$

2. Naopak ke každá nadrovina je polárou k právě jednomu bodu, který se nazývá jejím *pólem*.

   Naopak p_X je dáno $\Rightarrow \exists!\, X$

   $X^T B = p_X$

   $X^T = B^{-1} p_X$

3. Pro libovolné dva body X, Y platí

   $$X^T B Y = 0 \Leftrightarrow X \in p_y \Leftrightarrow Y \in p_X. \;\overset{\text{SYMETR.}}{\Leftrightarrow}\; Y^T B X = 0$$

4. Bod je X sdružen sám se sebou (nebo-li leží na své poláře p_X) právě tehdy, když leží na Q.

   $$X^T B X = 0 \Leftrightarrow X \in p_X \Leftrightarrow X \in Q. \Leftrightarrow X^T B X = 0$$

   V tomto případě p_X nazýváme tečnou nadrovinou ke Q v bodě X.

$b \to$ matice B

$b(v, w) \to (v)^T_{\text{souř.}} B \, (w)_{\text{souř.}}$

Definice 4.12. Mějme dva projektivní prostory $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}(V^{m+1})$ a $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(V^{n+1})$ nad stejným tělesem T a nějakou podmnožinu $A \subset \mathbf{P}^m$. O zobrazení

$$F : A \to \mathbf{P}^n$$

řekneme, že je projektivní, jestliže existuje lineární zobrazení $\bar{F} : V^{m+1} \to V^{n+1}$ tak, že pro každé $\mathbf{v} \in V^{m+1}$ takové, že $LO\{\mathbf{v}\} \in A$ platí

$$F(LO\{\mathbf{v}\}) = LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\}.$$

$\bar{F}$ a $a\bar{F}$ dávají stejné F

Poznámka 4.13. Omezení na podmnožinu A v definici 4.12 je nutné z toho důvodu, že když lineární zobrazení $\bar{F}$ není prosté, tak zobrazení F nemůže být definováno na bodech reprezentovaných vektory z $\ker \bar{F}$, neboť $LO\{\mathbf{0}\}$ není projektivní bod. Jestliže je $\bar{F}$ prosté, pak je F definováno na celém prostoru $\mathbb{P}^n$, v opačném případě na doplňku projektivního podprostoru (odpovídajícího $\ker \bar{F}$). Budeme studovat zejména projektivní zobrazení na témže prostoru (tedy $m = n$) generovaná regulárními lineárními zobrazeními na V^{n+1}.

Věta 4.14. Projektivní zobrazení $F : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ z ~~afinního~~ projektivního prostoru do sebe jsou bijektivní právě tehdy, když odpovídající lineární zobrazení $\bar{F}$ jsou bijektivní. Tato zobrazení F nazveme *projektivní transformace*. Všechny projektivní transformace daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání, která se nazývá *projektivní grupa*.

<u>Dk.</u> → Tvoří grupu, protože složení $\bar{F} \circ \bar{G}$ je regulární, lineární opět regulární.

→ inverze $\bar{F}^{-1}$ je také regulární

$$\boxed{PGL(n) = GL(n+1)/T^*}$$

<u>Důkaz $(\Rightarrow)$</u>

① $\bar{F}$ je bijekce

- F je jistě surjektivní $\forall Y : Y = LO\{\vec{w}\}$ a tedy $Y = LO\{\underbrace{\bar{F}^{-1}(\vec{w})}_{\vec{v}}\}$ a $Y = F(\underbrace{LO(\vec{v})}_{X})$

- F je i prosté, jestliže $F(x_1) = F(x_2)$

$X_1 = LO(\vec{v}_1)$ $\quad X_2 = LO(\vec{v}_2)$

a tedy platí $\bar{F}(\vec{v}_1) = a\,\bar{F}(\vec{v}_2)$

$\Rightarrow \bar{F}(\vec{v}_1) = \bar{F}(a\vec{v}_2) \Rightarrow \vec{v}_1 = a \cdot \vec{v}_2$

$\Rightarrow LO\{\vec{v}_1\} = LO\{\vec{v}_2\} = X_1 = X_2$

(2) F je bijekce : $F: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$

$\Rightarrow$ $\bar{F}$ má triviální $\operatorname{Ker} \bar{F}$ $\Rightarrow$ je prosté

$\Rightarrow$ $\bar{F}$ SURJEKTIVNÍ

$\vec{w} \in V^{n+1}$; $\operatorname{Lo}\{\vec{w}\} \in \operatorname{Im} F \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \alpha, \vec{v} : \quad \bar{F}(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{w}$

$\Rightarrow \bar{F}\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \vec{v}\right) = w$.

Věta 4.15. Projektivní transformace zachovávají dvojpoměr. Jestli-že je tedy F projektivní transformace, pak

$$(A, B, C, D) = (F(A), F(B), F(C), F(D)).$$

$\bar{F}$ je lineární, regulární

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\bar{F}(c) = \underline{\alpha_1}\, \bar{F}(a) + \underline{\beta_1}\, \bar{F}(b)$

$\bar{F}(d) = \underline{\alpha_2}\, \bar{F}(a) + \underline{\beta_2}\, \bar{F}(b)$

lané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in T,$$

$(F(A), F(B), F(C), F(D)) = \dfrac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in T.$

Věta 4.16. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n+2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje projektivní soustava souřadnic taková, že

$$\begin{aligned}
X_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\
X_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\
&\vdots \\
X_n &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\
X_{n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 1) \\
X_{n+2} &= (1, 1, \dots, 1, 1).
\end{aligned}$$

Dk. $X_i = LO\{\vec{v}_i\}$ $\qquad V^{n+1}$

1. pokus báze $B_1 = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1})$ LN, jinak by $X_1, \dots, X_{n+1}$ ležely v nadrovině.

v B_1: $LO\{v_i\}$

$\vec{v}_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \cdot \vec{v}_i$ $\qquad c_i \neq 0$ z předpokladu obecné polohy

$X_1 = (1, 0, \dots 0)$

$X_2 = (0, 1, \dots 0)$

$\vdots$

$X_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$

$X_{n+2} = (c_1, \dots, c_{n+1})$

2. pokus báze $B_2 = (\underbrace{c_1\vec{v}_1}_{\tilde{\vec{v}}_1}, \dots, \underbrace{c_{n+1} \cdot \vec{v}_{n+1}}_{\tilde{\vec{v}}_{n+1}})$ $\qquad \vec{v}_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\vec{v}}_i$

v B_2 $\qquad \vec{v}_1 = \frac{1}{c_1} \cdot \tilde{\vec{v}}_1$ $\qquad$ ~~PR~~ SOUŘADNICE JSOU AŽ NA NÁSOBEK.

$X_1 = \left(\frac{1}{c_1}, 0, \dots, 0\right) = (1, 0, \dots, 0)$

$\vdots$

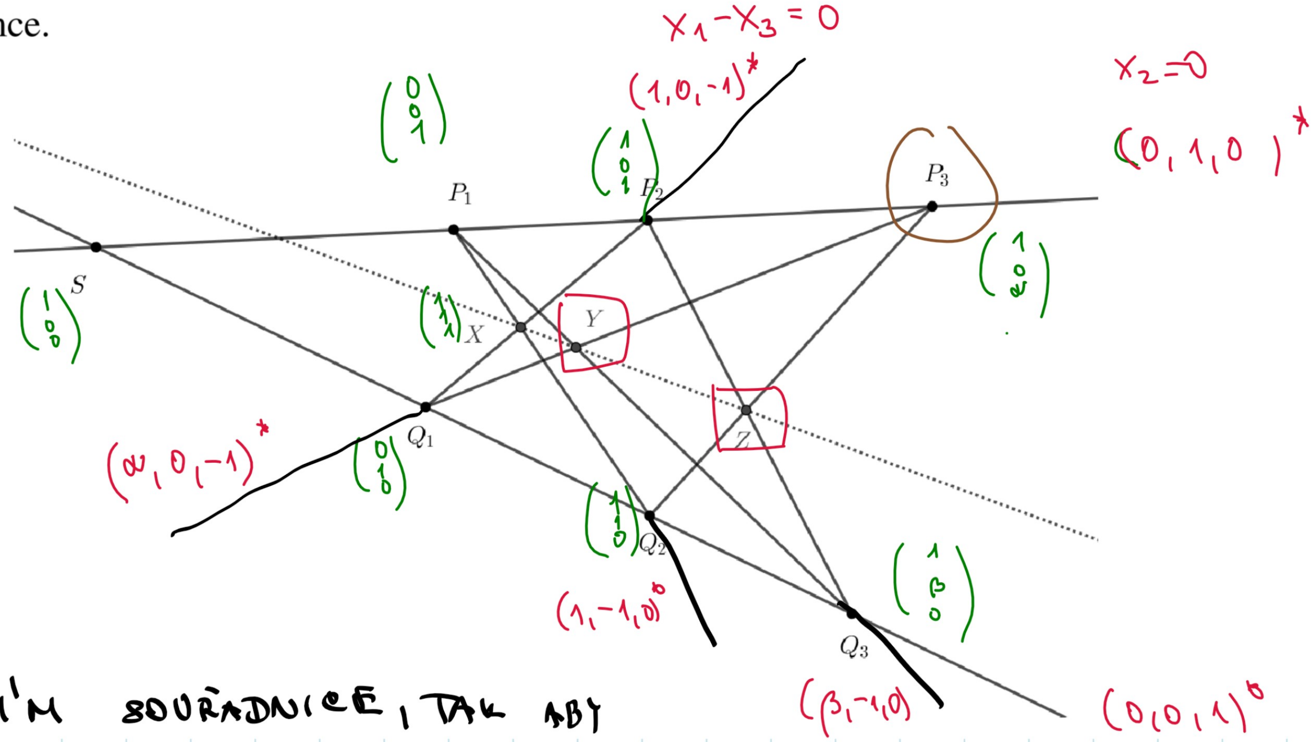
$X_{n+1} = \left(0, \dots 0, \frac{1}{c_{n+1}}\right) = (0, \dots, 1)$

$X_{n+2} = (1, \dots, 1)$

Věta 4.19 (Pappova věta)**.** V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme dvě přímky p, q, které se protínají v bodě S. Na přímce p mějme body P_1, P_2, P_3 různé navzájem a různé od S. Podobně na přímce Na přímce q mějme body Q_1, Q_2, Q_3 různé navzájem a různé od S. Pak platí, že body

$$X := \overleftrightarrow{P_1Q_2} \cap \overleftrightarrow{P_2Q_1}, \quad Y := \overleftrightarrow{P_1Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_1}, \quad Z := \overleftrightarrow{P_2Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_2}$$

leží na přímce.



Dk ZVOLÍM SOUŘADNICE, TAK ABY

S, Q_1, P_1, X byly "hezké"

$t_1 \neq 0$ (jinak by $P_3 = P_1$)

$$\boxed{P_3} = t_1 \cdot S + t_2 \cdot P_1 = t_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underbrace{\frac{t_2}{t_1}}_{\alpha :=} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\\alpha\end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{Q_3} = \ldots\ldots \begin{pmatrix}1\\\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y = \begin{pmatrix}1\\\beta\\\alpha\end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \ldots \quad Z = \begin{pmatrix}\alpha\beta - 1\\\alpha\beta - \beta\\\alpha\beta - \alpha\end{pmatrix}}$$

na přímce

$\Leftrightarrow$ vektory jsou LZ

"$\alpha\beta \cdot X - Y = Z$"

Definice 5.1. Mějme n-dimenzionální afinní prostor A se zaměřením V^n nad tělesem T a $(n+1)$-dimenzionální afinní prostor B se zaměřením V^{n+1} nad stejným tělesem a prosté afinní zobrazení $\varphi : A \to B$ a bod $\mathbf{P} \in B \setminus Im(\varphi)$. Pak je zobrazení $\Phi : A \to \mathbb{P}(V^{n+1})$ zadané předpisem

$$\Phi(\mathbf{X}) := LO\{\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{P}\},$$

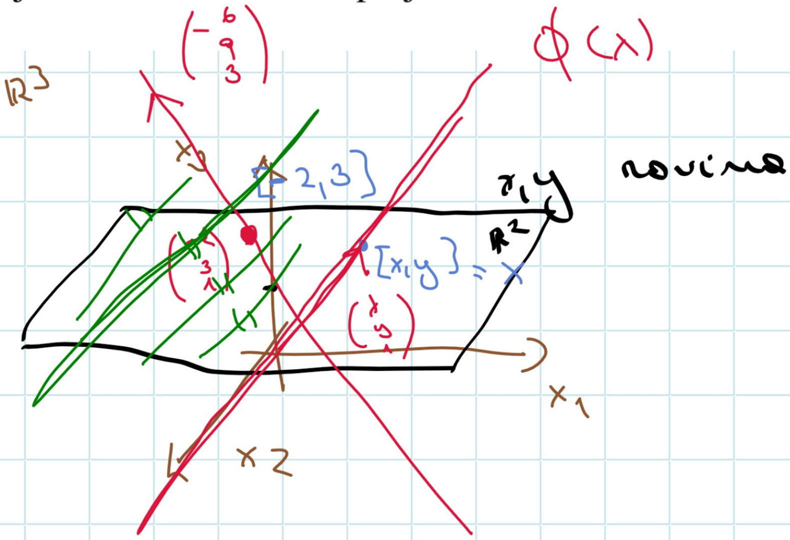
prosté a nazývá se *vnoření* A do projektivního prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1})$.

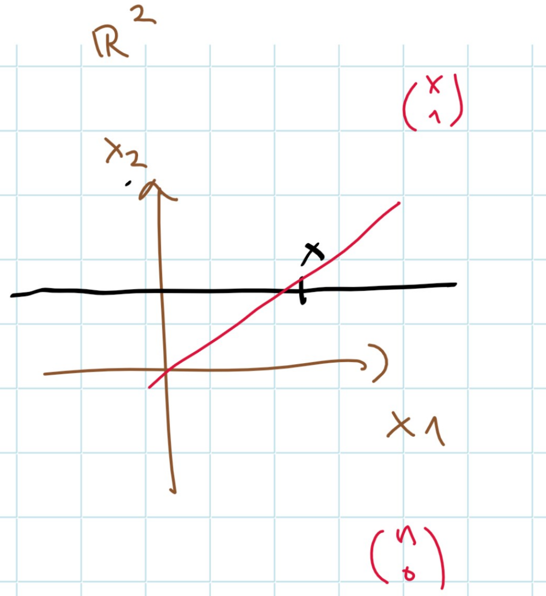
Definice 5.2. Pro libovolné těleso splňuje zobrazení $\Phi : T^n \to \mathbb{P}(T^{n+1})$ zadané předpisem

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = LO\{(x_1, \dots, x_n, 1)\}$$

definici 5.1 a nazývá se *kanonické vnoření* aritmetického afinního prostoru do aritmetického projektivního prostoru stejné dimenze. $\mathbb{P}(T^{n+1})$ se pak nazývá kanonickým projektivním rozšířením nebo též zúplněním afinního prostoru T^n. Přiřazení $(x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_n, 1)$ je zároveň vyjádřením Φ vůči kanonickým afinním souřadnicím T^n a kanonickým homogenním souřadnicím $\mathbb{P}(T^{n+1})$.

Poznámka 5.3. Následující definice a věty by bylo často možno uvažovat v obecném afinním prostoru a jeho libovolném projektivním rozšíření. Pro jednoduchost výkladu se však budeme omezovat jen na aritmetický afinní prostor a jeho kanonické projektivní rozšíření, nebo dokonce jen na reálnou afinní a projektivní rovinu.





$\mathbb{P}^2 = \Phi(\mathbb{R}^2) \cup \mathbb{P}^1$

$[x, y] \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Leftarrow$ vlastní body

$\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \Leftarrow$ nevlastní

Příklad 5.7 (Počítání v afinní a projektivní rovině)**.** Uvažujme afinní rovinu $\mathbb{R}^2$ s kanonickými afinními souřadnicemi $[x, y]$ a její kanonické projektivní rozšíření $\mathbb{P}^2$ s kanonickými homogenními souřadnicemi (x_1, x_2, x_3).

1. Nalezněte projektivní bod, který odpovídá afinnímu bodu $A = [3, -1]$, přesněji tedy nalezněte $\Phi(A)$.
   $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$
2. Nalezněte afinní bod, který odpovídá projektivnímu bodu $B = (-6, 9, 3)$, přesněji tedy nalezněte $\Phi^{-1}(B)$.
   $[-2, 3]$
3. Nalezněte projektivní rozšíření afinní přímky $2x+3y+4 = 0$ a určete všechny její nevlastní body.
4. Nalezněte afinní verzi přímky s duálními souřadnicemi $(2, -1, 5)^*$.
5. Rozhodněte, zda-li afinní body $A = [1, 2]$, $B[4, -4]$ a $C[3, -2]$ leží na přímce. Určete obecnou rovnici této přímky.
6. Nalezněte bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, kde A, B jsou jako v předchozím bodě a $D = [3, 5]$, $E = [1, 7]$.

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right]$$

$x_3 \neq 0$ zadání

(3) $p: \underbrace{2x + 3y + 4}_{} = 0$

$q: 2x+3y-5=0$

kdy je $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \Phi(p)$

$\Updownarrow$

$\left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right] \in p$

$\Leftrightarrow$

$$2\frac{x_1}{x_3} + 3\frac{x_2}{x_3} + 4 = 0 \qquad | \cdot x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$$

$\Phi(p)$: $(2, 3, 4)^*$ $\cap$ $x_3 = 0$

$(2, 3, -5)^*$ $(0, 0, 1)^*$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{(3, -2, 0)}$ stejný

$(3, -2)$ je směrový vektor

Definice 5.4. Nechť $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n, pak $\mathbb{P}^n = \Phi(T^n) \cup \mathbb{P}^{n-1}$, kde $\mathbb{P}^{n-1}$ je nadrovina s homogenní rovnicí $x_{n+1} = 0$, tedy se souřadnicemi $(0, \ldots, 0, 1)^*$. Tato nadrovina se nazývá nevlastní nadrovina, označuje se p_∞ a její body se nazývají nevlastní body. Jestliže $A \subset T^{n+1}$ je afinní podprostor dimenze k pak je jeho obraz $\Phi(A)$ obsažen právě v jednom projektivním podprostoru $\mathbb{A} \subset \mathbb{P}^n$ dimenze k. O $\mathbb{A}$ hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění podprostoru A a o A hovoříme jako o afinní verzi $\mathbb{A}$. Nevlastní body $\mathbb{A}$ považujeme i za nevlastní body A.

Věta 5.5. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ má každá afinní přímka p v $\mathbb{R}^2$ se směrovým vektorem $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ právě jeden nevlastní bod $(v_x, v_y, 0)$. Tento bod budeme rovněž nazývat *směr* p.