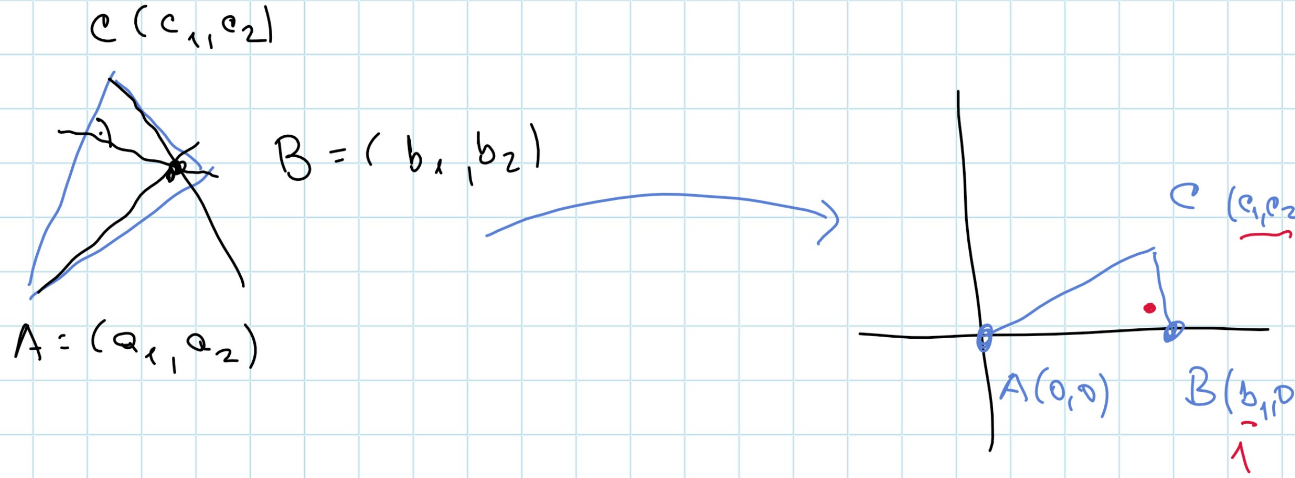
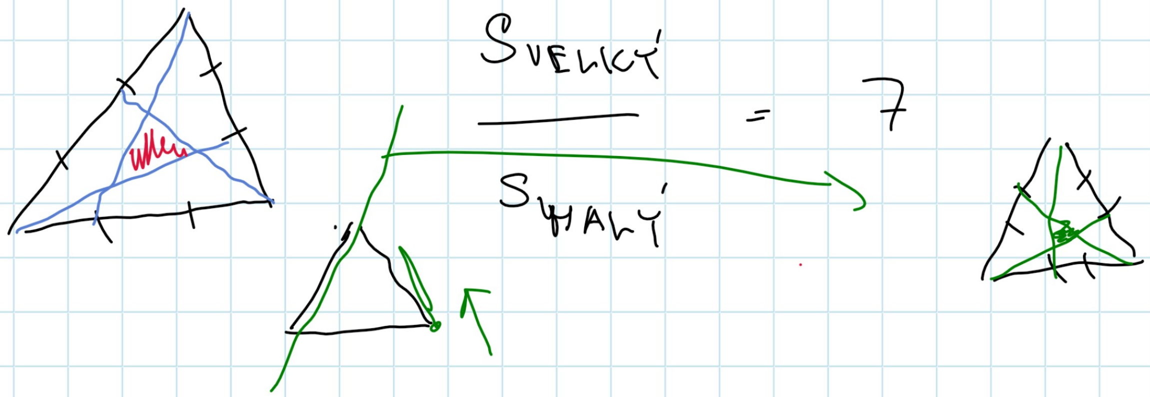
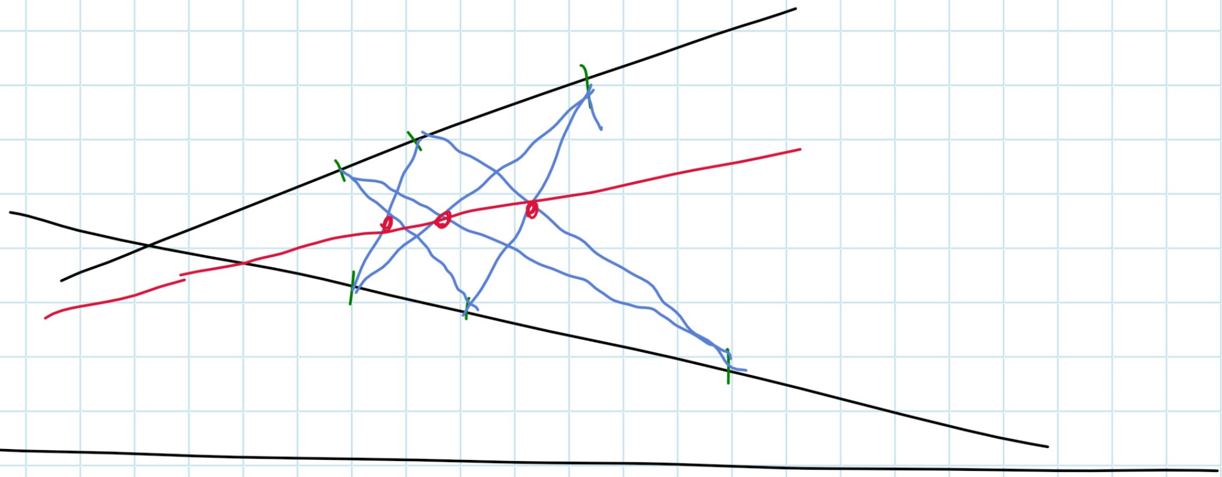
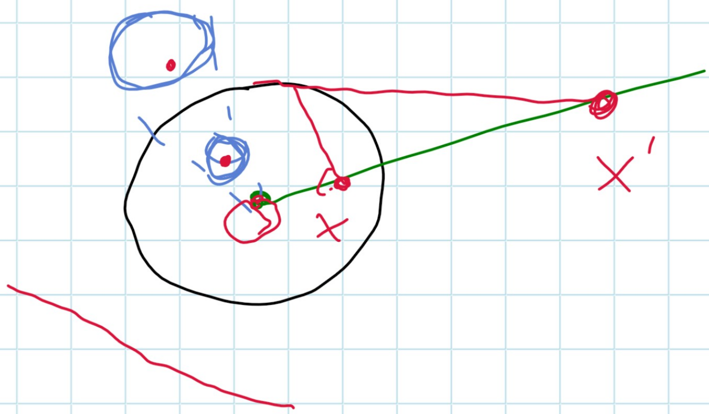
CO TO JE GEOMETRIE?

Erlangenský program (Felix Klein 1872)

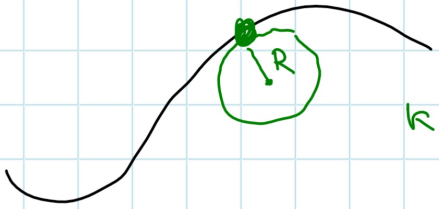








LA + ANAL

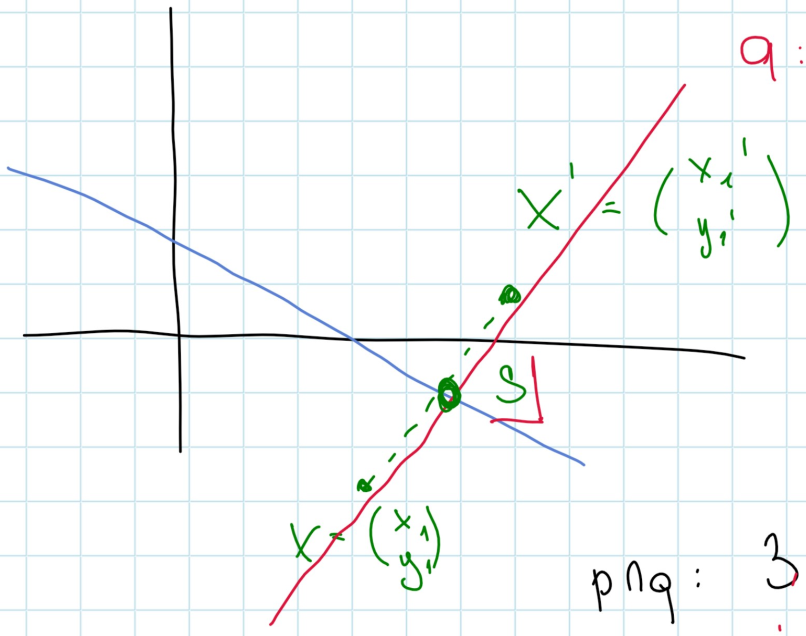


$k = \frac{1}{R}$

k ... invar. vůči shodnostem

k ... nezávisí na param.

Příklad 1.1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky $p : 3x+4y-7 = 0$.



$$q: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + 3t \\ y &= y_1 + 4t \end{aligned}}$$

$$p \cap q: \quad 3(x_1+3t)+4(y_1+4t)-7=0$$

$$t = \frac{7-3x_1-4y_1}{25} \iff S$$

$$\boxed{t = 2\,\frac{7-3x_1-4y_1}{25} \iff X'}$$

$$x_1' = x_1 + 3\cdot 2\,\frac{7-3x_1-4y_1}{25} = \frac{7}{25}x_1 - \frac{24}{25}y_1 + \frac{42}{25}$$

$$y_1' = y_1 + 4\cdot 2\,\frac{7-3x_1-4y_1}{25} = -\frac{24}{25}x_1 - \frac{7}{25}y_1 + \frac{56}{25}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{42}{25} \\ \frac{56}{25} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{7^2+24^2=25^2}$$

Definice 1.2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||.$$

Lemma 1.3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Věta 1.4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $(\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.)$ $\iff (A A^T = I_n)$

Důsledek 1.5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{p}), \quad (g\circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{X} + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}+\mathbf{q}).$$

$$f(X) = AX + p = Y \iff AX = (Y - p)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall Y\ \exists!\, X : \quad f(x) = Y$$

$$X = A^{-1}(Y - p) = A^T Y - A^T p, \qquad A^{-1} = A^T$$

inverzní zobr

SKLÁDÁNÍ

$$(g\circ f)(x) = B\cdot(AX + p) + q = (B\cdot A)X + (Bp + q)$$

$$\cancel{p \times q}$$

$$(B, q)\circ(A, p) = (B\cdot A,\ Bp + q)$$

$$ON(n) \times \mathbb{R}^n$$

Definice 1.6. Zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří ortonormální podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin).

$$A = I_n \qquad f(x) = X + p$$

$$p = \vec{0} \qquad f(x) = AX$$

Věta 1.7. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz. Plyne triviálně z blokového maticového násobení.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{42}{25} \\ \frac{56}{25} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} & \frac{42}{25} \\ -\frac{24}{5} & -\frac{7}{25} & \frac{56}{25} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & Bp+q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

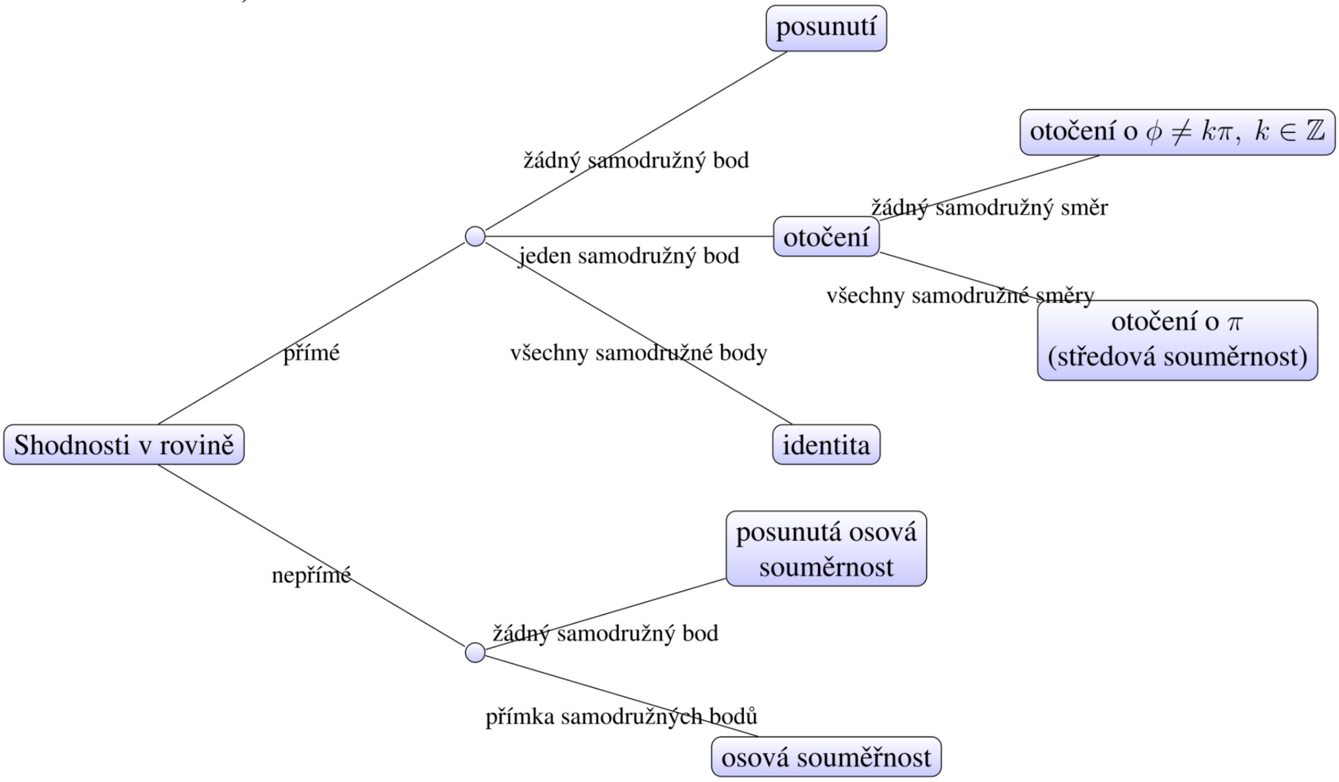
Definice 1.8. Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$. Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f.

Řekneme, že množina M je samodružná množina zobrazení f, jestliže platí $f(M) = M$, tedy zobrazení ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť).

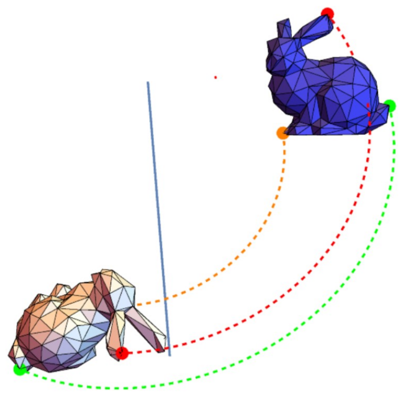
Lemma 1.9. Přímka $\mathbf{Q} + \langle \mathbf{v} \rangle$ je samodružnou množinou shodnosti f právě tehdy, když $\langle \mathbf{v} \rangle$ je jeho samodružný směr a $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ je násobkem $\mathbf{v}$.

□

Příloha, klasifikace shodností v $\mathbb{R}^2$



Věta 1.19. Každou přímá shodnost v $\mathbb{R}^3$ má alespoň jednu samodružnou přímku a lze složit z otočení kolem této přímky a posunutí ve směru této přímky (má tedy tvar šroubového pohybu).



Věta 1.11 (Rodriguesova formule)**.** Mějme dva vektory $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, přičemž $\mathbf{n}$ je jednotkový. Pak pro vektor $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$, který dostaneme otočením vektoru $\mathbf{r}$ kolem vektoru $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ o úhel ϕ v kladném směru platí:

$$\mathbf{r}' = (1 - \cos\phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos\phi\mathbf{r} + \sin\phi(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

Otočením v kladném směru přitom myslíme, že při úhlu $\phi \in (0, \pi)$ tvoří vektory $(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kladně orientovanou bázi $\mathbb{R}^3$ a při úhlu $\phi \in (-\pi, 0)$ záporně orientovanou.