

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání

Cvičení 9, verze ze dne 1. prosince 2021

9 Projektivní prostor a zobrazení

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se pracovat v projektivních prostorech a používat homogenní souřadnice.
- Seznámit se s konečnými projektivními rovinami.
- Naučit se pracovat s projektivními transformacemi.
- Studovat projektivní kuželosečky a polaritu.
- Poslední DU bude zadán na příštím cvičení.

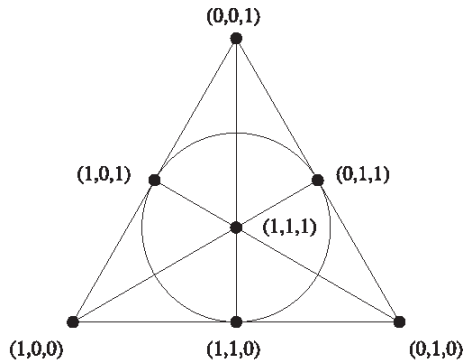
Příklady:

Úloha 9.1 (Reálná rovina). Uvažujme projektivní rovinu $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ a v ní body $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (1, 1, 1)$.

- Ukažte, že tyto body leží na projektivní přímce, najděte její parametrizaci a duální homogenní souřadnice.
- Nalezněte průsečík D přímky \overleftrightarrow{AB} s přímkou $(1, 2, -5)^*$ a vypočítejte dvojpoměr $\mu = (A, B, C, D)$.
- Vypočítejte dvojpoměr pro různé permutace, např. (A, B, D, C) , (B, A, C, D) , (C, B, A, D) a zamyslete se jak výsledky souvisejí s μ .
- Na přímce \overleftrightarrow{AB} nalezněte bod E tak, aby $(A, B, C, E) = -1$ (a tedy body tvořily harmonickou čtveřici).

Úloha 9.2 (Konečné geometrie). Studujme projektivní roviny $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{Z}_p^3)$, kde p je pevně zvolené prvočíslo.

- Ověřte, že následující obrázek tak zvané Fanovy roviny (Fano plane) popisuje všechny body a přímky v rovině $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_2^3)$. Spočítejte duální homogenní souřadnice všech sedmi přímek.



- b) Nakreslete všechny body a přímky projektivní roviny $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_3^3)$.
- c) Určete kolik má bodů a kolik přímek projektivní rovina $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_p^3)$. Kolik na každé přímce leží bodů a kolik přímek prochází každým bodem?
- d) Uvažujme projektivní rovinu $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_5^3)$ a v ní dva body $A = (1, 2, 3)$ a $B = (3, 1, 2)$. Vypište všechny body, které leží na přímce \overleftrightarrow{AB} . Nalezněte její průsečík s přímkou $p = (1, 1, 0)^*$.

Úloha 9.3 (Projektivní transformace). Nalezněte projektivní transformaci F přímky $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ na sebe, která splňuje

$$F(1, 0) = (1, 3), \quad F(2, 3) = (4, 9), \quad F(2, 1) = (2, 5).$$

Hint: souřadnice fungují až na násobek.

Úloha 9.4 (Projektivní transformace). Nalezněte projektivní transformaci F roviny $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ na sebe, která splňuje

$$F(1, 0, 0) = (1, 0, 2), \quad F(0, 1, 0) = (0, 1, -1), \quad F(0, 0, 1) = (1, 1, 2), \quad F(2, 1, 1) = (8, 1, 17).$$

Úloha 9.5. V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je dána množina rovnic v kanonických homogenních souřadnicích

$$Q : 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 5x_3^2 = 0.$$

Ukažte, že Q je regulární kuželosečka a nalezněte k ní tečnu v jejím bodě $(2, 0, 2)$. Nalezněte projektivní transformaci, která zobrazuje kanonickou kuželosečku $K : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ na Q .

Úloha 9.6. V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je dána kuželosečka rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

$$Q : 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 - 3x_3^2 = 0.$$

- a) Ukažte, že se jedná o regulární reálnou kuželosečku.

- b) Nalezněte poláru p_X k bodu $X = (3, 4, 1)$.
- c) Nalezněte tečny ke Q procházející bodem X .
- d) Ukažte, že bod X leží na přímce $r = (1, 1, -7)^*$. Vypočtěte $Y = r \cap p_X$ a oba průsečíky $r \cap Q$, které si označte A, B .
- e) Ukažte, že (X, Y, A, B) tvoří harmonickou čtveřici.

Úloha 9.7. V reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je dána kvadrika rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

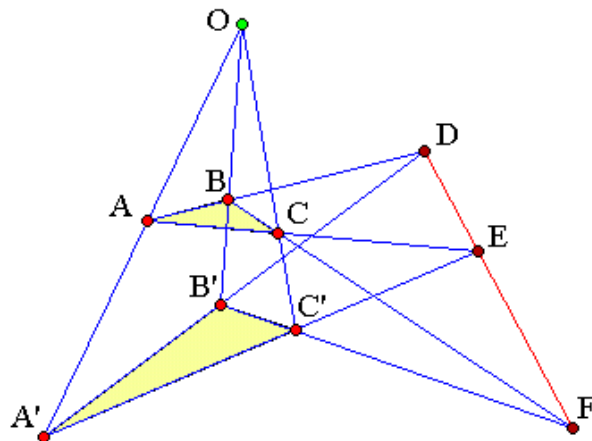
$$2x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 3x_2^2 - 2x_4^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 = 0.$$

Ověřte, že tato kvadrika je regulární a rozhodněte, zda-li je přímková či nikoliv. Nalezněte tečnou rovinu v jejím bodě $(3, -2, 2, -1)$. Nalezněte průnik této tečné roviny s kvadrikou.

Úloha 9.8 (Desarguesova věta). V projektivní reálné rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme šest různých bodů A, B, C, A', B', C' přičemž $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ se protínají v jednom bodě. Pak body

$$D := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}, \quad E := \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}, \quad F := \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$$

leží na přímce.



- a) Dokažte!
- b) Formulujte duální větu.
- c) Přiměřeně si lámejte hlavu nad tím, že pokud tento obrázek interpretujeme jako zobrazení prostorové situace, kdy máme dva (žluté) řezy jehlanu rovinami, pak přímka DEF je průsečnicí těchto rovin a kolinearita bodů D, E, F je zřejmá.