Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání

Cvičení 9, verze ze dne 25. listopadu 2024

9 Projektivní prostor a zobrazení

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se pracovat v projektivních prostorech a používat homogenní souřadnice.
- Seznámit se s konečnými projektivními rovinami.
- Naučit se pracovat s projektivními transformacemi.
- Studovat projektivní kuželosečky a polaritu.

Příklady:

Úloha 9.1 (Reálná rovina)**.** Uvažujme projektivní rovinu $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ a v ní body $A = (1,2,3)$, $B = (3,2,1)$, $C = (1,1,1)$.

a) Ukažte, že tyto body leží na projektivní přímce, najděte její parametrizaci a duální homogenní souřadnice.

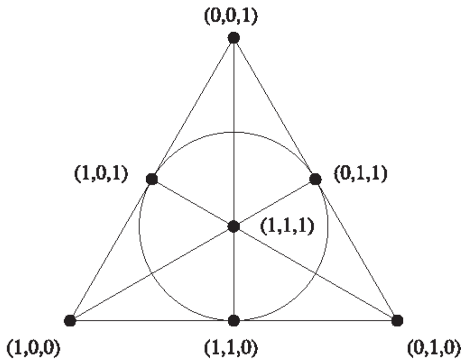
b) Nalezněte průsečík D přímky $\overleftrightarrow{AB}$ s přímkou $(1,2,-5)^*$ a vypočítejte dvojpoměr $\mu = (A,B,C,D)$.

c) Vypočítejte dvojpoměr pro různé permutace, např. (A,B,D,C), (B,A,C,D), (C,B,A,D) a zamyslete se jak výsledky souvisejí s μ.

d) Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ nalezněte bod E tak, aby $(A,B,C,E) = -1$ (a tedy body tvořily harmonickou čtveřici).

Úloha 9.2 (Konečné geometrie)**.** Studujme projektivní roviny $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{Z}_p^3)$, kde p je pevně zvolené prvočíslo.

a) Ověřte, že následující obrázek tak zvané Fanovy roviny (Fano plane) popisuje všechny body a přímky v rovině $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_2^3)$. Spočítejte duální homogenní souřadnice všech sedmi přímek.



b) Nakreslete všechny body a přímky projektivní roviny $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_3^3)$.

c) Určete kolik má bodů a kolik přímek projektivní rovina $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_p^3)$. Kolik na každé přímce leží bodů a kolik přímek prochází každým bodem?

d) Uvažujme projektivní rovinu $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_5^3)$ a v ní dva body $A = (1, 2, 3)$ a $B = (3, 1, 2)$. Vypište všechny body, které leží na přímce $\overleftrightarrow{AB}$. Nalezněte její průsečík s přímkou $p = (1, 1, 0)^*$.

Úloha 9.3 (Projektivní transformace)**.** Nalezněte projektivní transformaci F přímky $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ na sebe, která splňuje

$$F(1, 0) = (1, 3), \quad F(2, 3) = (4, 9), \quad F(2, 1) = (2, 5).$$

Hint: souřadnice fungují až na násobek.

Úloha 9.4 (Projektivní transformace)**.** Nalezněte projektivní transformaci F roviny $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ na sebe, která splňuje

$$F(1, 0, 0) = (1, 0, 2), \quad F(0, 1, 0) = (0, 1, -1), \quad F(0, 0, 1) = (1, 1, 2), \quad F(2, 1, 1) = (8, 1, 17).$$

Úloha 9.5. V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je dána množina rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

$$Q : 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 5x_3^2 = 0.$$

Ukažte, že Q je regulární kuželosečka a nalezněte k ní tečnu v jejím bodě $(2, 0, 2)$. Nalezněte projektivní transformaci, která zobrazuje kanonickou kuželosečku $K : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ na Q.

Úloha 9.6. V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je dána kuželosečka rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

$$Q : 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 - 3x_3^2 = 0.$$

a) Ukažte, že se jedná o regulární reálnou kuželosečku.

b) Nalezněte poláru p_X k bodu $X = (3, 4, 1)$.

c) Nalezněte tečny ke Q procházející bodem X.

d) Ukažte, že bod X leží na přímce $r = (1, 1, -7)^*$. Vypočtěte $Y = r \cap p_X$ a oba průsečíky $r \cap Q$, které si označte A, B.

e) Ukažte, že (X, Y, A, B) tvoří harmonickou čtveřici.

Úloha 9.7. V reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je dána kvadrika rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

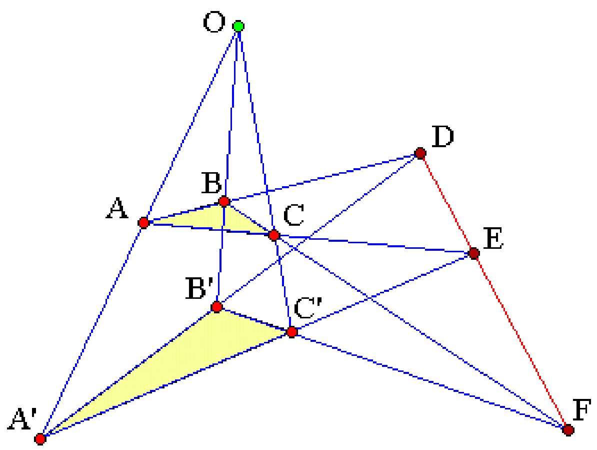
$$2x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 3x_2^2 - 2x_4^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 = 0.$$

Ověřte, že tato kvadrika je regulární a rozhodněte, zda-li je přímková či nikoliv. Nalezněte tečnou rovinu v jejím bodě $(3, -2, 2, -1)$. Nalezněte průnik této tečné roviny s kvadrikou.

Úloha 9.8 (Desarguesova věta)**.** V projektivní reálné rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme šest různých bodů A, B, C, A', B', C' přičemž $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ se protínají v jednom bodě. Dokažte, že pakbody

$$D := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}, \quad E := \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}, \quad F := \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$$

leží na přímce.



Přiměřeně si lámejte hlavu nad tím, že pokud tento obrázek interpretujeme jako zobrazení prostorové situace, kdy máme dva (žluté) řezy jehlanu rovinami, pak přímka DEF je průsečnicí těchto rovin a kolinearita bodů D, E, F je zřejmá.