

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání

Cvičení 8, verze ze dne 27. listopadu 2021

8 Afinní prostor a zobrazení

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se pracovat s afinními zobrazeními
- Naučit se používat barycentrické souřadnice v rovině

Příklady:

Úloha 8.1. Určete rovnice afinního zobrazení z \mathbb{R}^2 do sebe, ve kterém bod $M[0, 1]$ přechází do bodu $M'[-3, 3]$ a asociovaný homomorfismus zobrazuje vektory $\mathbf{u}(1, 2)$ a $\mathbf{v}(1, 0)$ po řadě na vektory $\mathbf{u}'(-7, -2)$, $\mathbf{v}'(1, -2)$.

Úloha 8.2. Určete afinní zobrazení f z \mathbb{R}^2 do sebe tak, aby $f([-1, 1]) = [6, 7]$, $f([1, -1]) = [4, 5]$ a $f([2, 0]) = [7, 12]$. Určete zda-li se jedná o afinitu a případně nalezněte zobrazení inverzní.

Úloha 8.3. Určete obraz bodu $[3, 1, -2] \in \mathbb{R}^3$ při afinním zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňujícím $f([2, 1, -1]) = [1, 3]$, $f([1, 0, 2]) = [0, 2]$, $f([0, 1, 1]) = [1, -1]$, $f([1, 1, 1]) = [1, 1]$ a obraz vektoru $(3, 1, -2)^T$ při asociovaném homomorfismu \bar{f} .

Úloha 8.4. Lineární zobrazení \bar{f} asociované s afinním zobrazením $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázi B matici A . Navíc platí $f([1, 2]) = [5, -8]$. Určete $f([3, 4])$.

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array} \right) \right), A = \left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{array} \right).$$

Úloha 8.5. Vyjádřete kolmou projekci π celého \mathbb{R}^2 na přímku $x + 2y + 3 = 0$ a ověřte, že $\pi \circ \pi = \pi$.

Úloha 8.6. V afinní rovině \mathbb{Z}_5^2 jsou dány body $A = [2, 3]$, $B = [1, 4]$. Nalezněte rovnoběžku s přímkou AB , která prochází bodem $C = [2, 2]$ a popište ji parametricky i rovnicově.

Úloha 8.7. Na reálné afinní přímce jsou dva různé body A, B . Definujme $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ a $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$. Vyjádřete dělicí poměry $\frac{AT}{TB}$, $\frac{TA}{AB}$, $\frac{ST}{TB}$. Vyjádřete bod S jako afinní kombinaci bodů A a T .

Úloha 8.8. V \mathbb{R}^2 je dán trojúhelník ABC s vrcholy $A[2, 0]$, $B[-3, 0]$ a $C[3, -3]$. Ukažte, že body $P[-1, -1]$, $Q[1, 3]$, a $R[-\frac{1}{2}, 0]$ leží postupně na přímkách BC , CA a AB a určete v jakém poměru je rozdělují. Rozhodněte, zda body P, Q, R leží na přímce.

Úloha 8.9. V \mathbb{R}^2 je nějaký trojúhelník ABC a dále je S střed strany AB a bod T leží v jedné pětině strany AC . Označme si P průsečík přímek CS a BT . V jakém poměru dělí bod P úsečky CS a BT ? Jaký je poměr obsahů trojúhelníků ABC a PBC ?

Úloha 8.10. (**) V \mathbb{R}^2 je nějaký trojúhelník ABC a bod X , který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Označme si $P = AX \cap BC$, $Q = BX \cap CA$ a $R = CX \cap AB$. Dokažte, že platí

$$\frac{AX}{XP} = \frac{AR}{RB} + \frac{AQ}{QC}.$$