Cvičení k přednášce Geometrie 1

Verze ze dne 21. listopadu 2021

7 Afinní prostory

Cíle cvičení:

- Procvičit počítání se souřadnicemi afinního prostoru,
- naučit se pracovat s afinními kombinacemi a barycentrickou soustavou souřadnic.
- přecházet mezi různými popisy afinního podprostoru,
- procvičit určování vzájemné polohy a vzdálenosti afinních podprostorů.
- Za domácí úkol je úloha 7.7.

Řešené příklady:

Úloha 7.1. Uvažujme dvě posloupnosti $S = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ a $R = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$ v $\mathbb{R}^2$.

(a) Ověřte, že se jedná o souřadné soustavy afinního prostoru $\mathbb{R}^2$,

(b) spočítejte souřadnice bodu $b = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické souřadné soustavě a vzhledem k soustavě souřadnic S,

(c) najděte bod c, pro který $[c]_S = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$,

(d) pro bod a afinního prostoru najděte $[a]_S$, jestliže $[a]_R = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$,

(e) obecněji, pro bod a afinního prostoru najděte $[a]_S = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, jestliže $[a]_R = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Úloha 7.2. Mějme afinní prostor $\mathbb{R}^2$ nad tělesem $\mathbb{R}$ s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$ a $b = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

(a) Spočítejte afinní kombinaci bodů $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$,

(b) rozhodněte, zda je bod b afinní kombinací bodů $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ a pokud ano, spočítejte ji,

(c) ověřte, že je posloupnost $B = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)$ barycentrická soustava souřadnic a určete barycentrické souřadnice $[b]_B$ a $[\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}]_B$ (je to bod z B!).

(d) rozhodněte, zda body b a $c = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ leží v trojúhelníku s vrcholy B,

(e) spočítejte těžiště trojúhelníku B.

Úloha 7.3. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem uvažujme přímky $P = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\}$ a $Q = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\}$.

(a) Určete vzájemnou polohu přímek P a Q,

(b) určete úhel přímek přímky P a Q,

(c) najděte přímku různoběžnou a zároveň kolmou na obě přímky P a Q,

(d) spočítejte vzdálenost P a Q.

Úloha 7.4. V afinním prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ s vektorovým prostorem $\mathbb{Z}_5^4$ uvažujme tři podprostory

$$D_1 = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix}\},\quad D_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\},\quad D_3 = \{a \in A | \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\3 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot a = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\}.$$

(a) Najděte soustavu souřadnic a barycentrickou soustavu souřadnic afinních prostorů D_1, D_2 a D_3.

(b) určete parametrické vyjádření podprostorů D_1 a D_3,

(c) určete rovnicové vyjádření podprostorů D_1 a D_2,

(d) určete podprostory D_2 a D_3 jako afinní kombinace bodů.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 7.5. Uvažujme posloupnost bodů $B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ a bod $b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ v afinním prostoru nad tělesem $\mathbb{R}$ s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^3$.

(a) Ověřte, že je B barycentrická soustava souřadnic afinního prostoru a že body B tvoří (nedegenerovaný) čtyřstěn,

(b) spočítejte barycentrické souřadnice bodu b vzhledem k barycentrické soustavě souřadnic B a

(c) najděte bod c s barycentrickými souřadnicemi $(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})^T$ vzhledem k soustavě B,

(d) určete barycentrické souřadnice bodu b vzhledem k soustavě $B' = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ (využijte podobnost s B),

(e) rozhodněte, zda bod b či c leží ve čtyřstěnu B.

Úloha 7.6. Uvažujme aritmetický afinní prostor $\mathbb{R}^4$ se zaměřením $\mathbb{R}^4$. Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\2\\4\\4\end{pmatrix}\},$$

kde a je pevné reálné číslo a D_2 je řešením soustavy (s jedinou rovnicí)

$$(2, 3, 4, 1) \cdot x = 10.$$

Ukažte, že D_2 je nadrovina a určete hodnotu a tak, aby D_1 a D_2 byly rovnoběžné.

Úloha 7.7. Uvažujme aritmetický afinní prostor $\mathbb{R}^4$ se zaměřením $\mathbb{R}^4$. Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\}.$$

Pro oba podprostory určete jejich dimenzi a nalezněte jejich rovnicové vyjádření. Určete jejich vzájemnou polohu a v případě různoběžnosti i jejich průsečík.