

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání

Cvičení 6, verze ze dne 10. listopadu 2021

6 Křivkový integrál

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se počítat a aplikovat křivkový integrál prvního a druhého druhu.

Příklady:

Úloha 6.1. Spočtete délku křivky $\mathbf{c}(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \cos \frac{t}{2}]$ na intervalu $t \in (0, 2\pi)$.

Úloha 6.2. Spočtete délku asteroidy $\mathbf{c}(t) = [a \cos^3 t, a \sin^3 t]$ na intervalu $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Úloha 6.3. Vypočtete křivkový integrál 1. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} |x| ds,$$

kde \mathbf{c} je parabola $y = x^2$, $x \in (-1, 1)$.

Úloha 6.4. Vypočtete křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} (a - y) dx + x dy,$$

kde $\mathbf{c}(t)$ je cykloida $\mathbf{c}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$, $t \in (0, 2\pi)$.

Úloha 6.5. Spočtete křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} \frac{-y^2}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} dx + \frac{x^2}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} dy$$

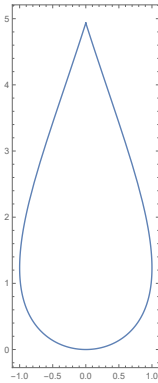
kde \mathbf{c} je křivka $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ od $[0, 1]$ do $[1, 0]$.

Úloha 6.6. Pomocí Greenovy věty spočtete křivkový integrál

$$\int_{\mathbf{c}} (x + y) dx - (x - y) dy,$$

kde \mathbf{c} je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0, b > 0$.

Úloha 6.7. Určete obsah plochy ohraničené křivkou $\mathbf{c}(t) = [\sin t, \frac{t^2}{2}]$, kde $t \in (-\pi, \pi)$.



Úloha 6.8. (*) Jaký obsah má plocha, kterou může spást koza přivázaná na provazu o délce L k mohutnému stromu, který má kmen o kruhovém průřezu s poloměrem a , $L < \pi a$. Místo, kde je provaz přivázaný ke stromu se nehýbe.

Úloha 6.9. (*) Vyjádřete obsah pravidelného n -úhelníku, který má předepsaný obvod ℓ . Studujte jak se tento obsah chová pro $n \rightarrow \infty$.