

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání

Cvičení 2, verze ze dne 22. září 2022

2 Shodná zobrazení v prostoru

Příklady:

Úloha 2.1. Nebojme se kvaternionů a vypočtěme součin q_1q_2 jednak přímo z definice a druhak geometricky pomocí formule s vektorovým a skalárním součinem. Rovněž k těmto kvaternionům nalezněte kvaterniony inverzní.

$$\begin{aligned}q_1 &= 2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{k} \\q_2 &= 1 + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\end{aligned}$$

Úloha 2.2. Nalezněte otočení vektoru $(0, 0, 1)$ kolem vektoru $(1, 2, 2)$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v kladném směru. Pokuste se úlohy vyřešit jak pomocí Rodriguesovy formule tak pomocí kvaternionů.

Úloha 2.3. Vyjádřete středovou souměrnost v \mathbb{R}^3 se středem $[1, 2, 3]$. Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

Úloha 2.4. Nalezněte vyjádření rovinové souměrnosti v \mathbb{R}^3 , která zobrazuje bod $[1, 0, -2]$ na bod $[3, 2, 0]$.

Úloha 2.5. Nalezněte vyjádření osové souměrnosti v prostoru podle přímky s parametrickým vyjádřením $[1, 0, -1] + t(1, 2, 3)$. Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

Úloha 2.6. Ověřte, že rovnice

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1, \\y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2, \\z' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 3,\end{aligned}$$

popisují přímou shodnost \mathbb{R}^3 . Najděte samodružnou přímku tohoto zobrazení a vyjádřete je jako složení otočení kolem této přímky a posunutí v jejím směru (tedy jako šroubový pohyb). Jaká je velikost úhlu otočení a vektoru posunutí?

Úloha 2.7. Nalezněte všechny jednotkové kvaterniony, které odpovídají rotaci, která převádí vektor $(1, 0, 0)$ na vektor $(0, 1, 0)$.