Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání, verze 30. září 2024

Cílem cvičení je naučit se pracovat se shodnostmi v rovině, najít jejich samodružné body a přímky, zobrazit objekty pomocí dané shodnosti, sestrojit shodnost splňující zadané vlastnosti. Za domácí úkol je úloha 1.8, odevzdejte ji do začátku třetího cvičení.

1 Shodná zobrazení v rovině

Úloha 1.1. Pro následující zobrazení z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o shodnost. Jestliže ano, nalezněte její samodružné prvky (body, směry, přímky) a inverzní zobrazení. Složte některá zobrazení mezi sebou.

a) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1$, $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$

b) $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20$, $y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$

c) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1$, $y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2$

d) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1$, $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$

e) $x' = -x + 1$, $y' = -y + 2$

f) $x' = x + 3$, $y' = -y$

Úloha 1.2. Pomocí zobrazení z úlohy 1.1, a) zobrazte

a) bod $[2, -3]$

b) přímku $[1, 1] + t(1, 2)$

c) přímku $x + y - 3 = 0$

d) parabolu $y - x^2 = 0$

Úloha 1.3. Určete reálné parametry p, q tak, aby existovala shodnost f v $\mathbb{R}^2$ taková, že $f : [3, 0] \mapsto [1, 4]$ $f : [1, 2] \mapsto [3, p]$, $f : [-1, 2] \mapsto [1 + p, -q]$. Tuto shodnost analyzujte.

Úloha 1.4. Nalezněte rovnici otočení v rovině se středem $[1, 3]$ o úhel α.

Úloha 1.5. Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : x - y - 3 = 0$ a určete typ shodnosti.

Úloha 1.6. Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : 2x + 3y = 0$ a určete typ shodnosti.

Úloha 1.7. Popište všechny shodnosti v rovině, které zobrazí bod $\mathbf{X} = [2, 5]$ na bod $\mathbf{X}' = [-6, 3]$.

Úloha 1.8. Nalezněte všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$, pro které je přímka $3x + 4y - 1 = 0$ samodružná a zároveň její bod $[3, -2]$ je samodružný.