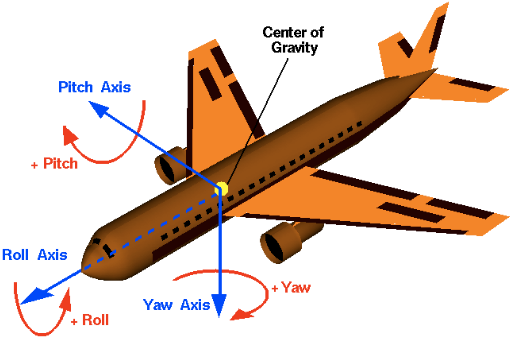
Rotace ve 3D a kvaterniony

Zbyněk Šír

MÚ UK

Eulerovy úhly



http://www.youtube.com/watch?v=UpSMNYTVqQI

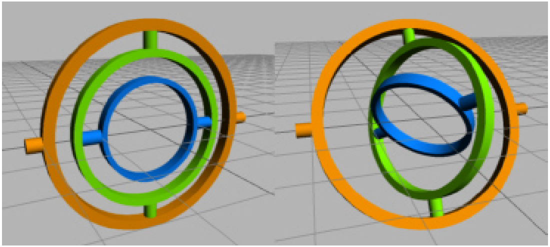
Eulerovy úhly - maticový zápis

$R(\alpha, \beta, \gamma) =$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Eulerovy úhly - nevýhody

- závislost na souřadném systému
- souřadný systém je lokální vůči tělesu
- závislost na pořadí rotací
- složitý inverzní problém
- singularity (gimbal lock)
- ...



William Rowan Hamilton 1805 - 1865

- 1835 - komplexní čísla
- zkouší vymyslet něco podobného pro 3D geometrii

"Every morning on my coming down to breakfast, your little brother William Edwin, and yourself, used to ask me: 'Well, Papa, can you multiply triplets?' Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: 'No, I can only add and subtract them.'"

- 16. října 1843 objev kvaternionů
- vyryl jejich rovnici do Broughamského mostu
- po zbytek života se věnoval jejich vlastnostem

Kvaterniony - definice

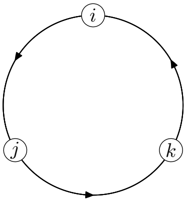
$$\mathbb{H} = \{q | q = a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

- zápis $\mathbb{H} \ni q = a + bi + cj + dk = (a, \mathbf{v})$, kde $s \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$
- Sčítání

$$q_1 + q_2 = (s_1, \mathbf{v_1}) + (s_2, \mathbf{v_2}) = (s_1 + s_2, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$$

- Násobení
  - $q_1 * q_2 = (s_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) * (s_2 + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = (s_1 s_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + (s_1 x_2 + s_2 x_1 + y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathbf{i} + (s_1 y_2 + s_2 y_1 + x_2 z_1 - x_1 z_2)\mathbf{j} + (s_1 z_2 + s_2 z_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{k}$
  - $q_1 * q_2 = (s_1, \mathbf{v_1}) * (s_2, \mathbf{v_2}) = (s_1 s_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} + s_1 \mathbf{v_2} + s_2 \mathbf{v_1})$
  - není komutativní

·	1	**i**	**j**	**k**
1	1	**i**	**j**	**k**
i	**i**	-1	**k**	-**j**
j	**j**	-**k**	-1	**i**
k	**k**	**j**	-**i**	-1



Definice

- **skalární kvaternion** - nulová vektorová část
- **ryzí kvaternion** - nulová skalární část
- **opačný kvaternion** ke kvaternionu $q = (s, \mathbf{v})$ je kvaternion $-q = (-s, -\mathbf{v})$.
- Mezi kvaterniony existuje **jednotkový** prvek vůči násobení $\imath = (1, (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}))$, tedy $q\imath = \imath q = q$.
- **konjugovaný kvaternion** $\overline{q} = \overline{(s, \mathbf{v})} = (s, -\mathbf{v})$.
- **norma kvaternionu** $q = (s, \mathbf{v}) = (s, (x, y, z))$:

$$||q|| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{q\overline{q}}.$$

Maticové zápisy kvaternionů

Prvky $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ můžeme reprezentovat jako komplexní matice

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro kvaterniony máme maticové zápisy

$$s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = g + h\mathbf{j} = \begin{pmatrix} g & h \\ -\bar{h} & \bar{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -x & z & -y \\ x & s & y & z \\ -z & -y & s & x \\ y & -z & -x & s \end{pmatrix},$$

kde $g = s + x\mathbf{i}$ a $h = y + z\mathbf{i}$.

Jednotkové kvaterniony

- **inverzní kvaternion** k nenulovému kvaternionu q je kvaternion $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{||q||^2}$.
- **jednotkový kvaternion**, je každý kvaternion, pro který platí: $||q|| = 1$
- množinu všech jednotkových kvaternionů označujeme $\mathbb{H}_1$
- Jedná se o multiplikativní grupu.
- Pro $q, q_1 \in \mathbb{H}_1$ platí: $||qq_1|| = 1$ a $q^{-1} = \overline{q}$.

Rotace ve 3D

- Každý jednotkový kvaternion q lze zapsat v následujícím tvaru: $q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha)$, kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor v R^3 a $\alpha \in [0, \pi]$.
- **Věta:** Pro pevný jednotkový kvaternion q je zobrazení $R^3 \to R^3$

$$\mathbf{r} \to q\mathbf{r}\bar{q}$$

rotací kolem osy $\mathbf{n}$ o úhel 2α proti směru hodinových ručiček.
- Pro nejednotkový kvaternion p máme

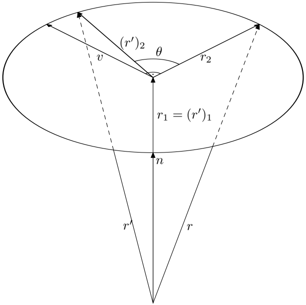
$$p\mathbf{r}p^{-1} = p\mathbf{r}\frac{\bar{p}}{||p||^2} = \frac{p}{||p||}\mathbf{r}\frac{\bar{p}}{||p||} = q\mathbf{r}\bar{q},$$

kde $q = \frac{\bar{p}}{||p||}$.

Rotace ve 3D - Rodriguesova formule

Jak spočítáme rotaci vektoru $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ kolem jednotkového vektoru $\mathbf{n}$ o úhel θ proti směru hodinových ručiček.

- $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$
  - $\mathbf{r}_1$ projekce do $\mathbf{n}$, $\mathbf{r_1} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$
  - $\mathbf{r_2}$ kolmý k $\mathbf{n}$, $\mathbf{r_2} = \mathbf{r} - \mathbf{r_1}$
- $\mathbf{v}$ kolmý k $\mathbf{n}, \mathbf{r_2}$, $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{r_2} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$
- $(\mathbf{r}')_\mathbf{2} = \mathbf{r_2} \cos\theta + \mathbf{v} \sin\theta$
- $(\mathbf{r}')_\mathbf{1} = \mathbf{r_1}$
- $\mathbf{r}' = (1 - \cos\theta)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{r} \cos\theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin\theta$



Formule pro kvaterniony

Co udělá s ryzím kvaternionem $\mathbf{r}$ zobrazení $\mathbf{r} \to q\mathbf{r}\bar{q}$, kde q je jednotkový kvaternion?

- můžeme psát $q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha)$, kde $|n| = 1$
- využijeme vzorce $\mathbf{v_1} \times (\mathbf{v_2} \times \mathbf{v_3}) = (\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_3})\mathbf{v_2} - (\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2})\mathbf{v_3}$
- upravíme $(s, \mathbf{v})(0, \mathbf{r})(s, \mathbf{v})^{-1} = (0, (s^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + 2s(\mathbf{v} \times \mathbf{r}))$
- provedeme substituci $s = \cos\alpha$ and $\mathbf{v} = \mathbf{n}\sin\alpha$
- dostáváme $(s, \mathbf{v})(0, \mathbf{r})(s, \mathbf{v})^{-1} = (0, (1 - \cos 2\alpha)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{r}\cos 2\alpha + (\mathbf{n} \times \mathbf{r})\sin 2\alpha)$

Rotace pomocí kvaternionů

Theorem (Euler)

Složení dvou rotací je opět rotace

Důkaz.

$q_2(q_1 p q_1^{-1})q_2^{-1} = (q_2 q_1)p(q_2 q_1)^{-1}$ □

Theorem

Zobrazení, které q přiřadí zobrazení $v \to qvq^{-1}$ je 2:1 homomorpfismus mezi grupou jednotkových kvaternionů a SO_3.

Důkaz.

q dává stejnou rotaci jako $-q$. □

- jednotkové kvaterniony jsou dvojitým nakrytím SO_3
- dostaneme z toho Hopfovu fibraci $S^3 \to S^2$, kde fíbry jsou $\simeq S^1$.

3D rotace pomocí kvaternionů

- Jednotkové kvaterniony $q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha)$, kde $|\mathbf{n}| = 1$, $\alpha \in [0, \pi]$.
- Pro pevné q je
$$\mathbf{r} \to q\mathbf{r}\bar{q} \tag{1}$$
rotace kolem osy $\mathbf{n}$ o úhel 2α proti směru hodinových ručiček
- Zjevně q a $-q$ dávají stejnou rotaci
- Pro nejednotkový kvaternion p máme
$$p\mathbf{r}p^{-1} = p\mathbf{r}\frac{\bar{p}}{||p||^2} = \frac{p}{||p||}\mathbf{r}\frac{\bar{p}}{||p||} = q\mathbf{r}\bar{q}, \tag{2}$$
takže vlastně točíme jednotkovým kvaternionem $q = \frac{\bar{p}}{||p||}$ pomocí formule (1).
- Jako cvičeníčko: jak vypadají všechny jednotkové kvaterniony, které rotují vektor $[1, 0, 0]$ na vektor $[0, 1, 0]$?

Interpolace poloh objektu ve 3D

- Máme 2 polohy objektu dané jednotkovými kvaterniony $\{q_0, q_1\}$ a chceme přejít spojitě od jedné ke druhé.
- Nejjednoduší je LERP (linear interpolation), tedy vypočítat

$$q_t = (1-t)q_0 + tq_1$$

  a použít formuli (2). Ale to je vlastně rotace pomocí jednotkového kvaternionu

$$\frac{(1-t)q_0 + tq_1}{||(1-t)q_0 + tq_1||},$$

  což taková krása není.
- Lepší je SLERP (spherical linar interpolation)

$$q_t = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta} q_0 + \frac{\sin t\theta}{\sin\theta} q_1, \tag{3}$$

  kde θ je úhel mezi q_0 a q_1 (bráno v $\mathbb{R}^4$).

SLERP

- **Věta:** Formule (3) je rovnoměrná parametrizace kruhového oblouku mezi q_0 a q_1.
- SLERP a LERP probíhá stejné polohy, výhoda je SLERP je v rovnoměrnosti.
- Vždy je třeba případně vzít $-q_1$ místo q_1 tak, aby $\theta \leq \pi/2$. Jinak by došlo k tomu, že se objekt do té samé polohy bude přesouvat doplňkovým (mnohem delším) způsobem.
- Pokud se kromě rotace objekt i posouvá, interpolujeme posunutí lineárně v $\mathbb{R}^3$.
- Pokud máme posloupnost více poloh, interpolujeme každé dvě pozice (lomená sférická čára), nebo globálně pomocí sférického spline.
- Každá animace rotací je vlastně křivkou v jednotkových kvaternionech, tedy sférickou křivkou na $\mathbb{S}^3$.