Geometrie pro počítačovou grafiku

Eukleidovské shodnosti v rovině

Zbyněk Šír

Matematický ústav UK

Eukleidovské shodnosti

- **Definice:** Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|| = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||.$$

- **Lemma:** Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.
- **Věta:** Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Souřadnice bodů i vektorů bude psát jako sloupcové vektory.

Důsledky předchozí věty

- Všechny shodnosti prostoru $\mathbb{R}^n$ tvoří grupu $\mathbb{E}(n)$. Její dimenze (počet stupňů volnosti) je $n(n+1)/2$.
- Lineární zobrazení **vektorového** prostoru $\mathbb{R}^n$ do sebe dané maticí $\mathbf{A}$ se nazývá asociované lineární zobrazení k f.
- Bodům, které se zobrazí na sebe říkáme samodružné body $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Vlastním směrům asociovaného zobrazení říkáme samodružné směry.
- Shodné zobrazení nazveme přímé, když $\det \mathbf{A} = 1$ a nepřímé, když $\det \mathbf{A} = -1$.
- Reálná vlastní čísla matice A mohou být jen ± 1.
- Přímé shodnosti tvoří podgrupu.
- Shodná zobrazení, kde $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ tvoří podgrupu posunutí, což je vlastně vektorový prostor $\mathbb{R}^n$.
- Shodná zobrazení, kde $\mathbf{p} = 0$ tvoří podgrupu isometrií vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, která se označuje $ON(n)$ a nazývá se ortonormální grupa.

Skládání shodných zobrazení

- Jak se shodná zobrazení vlastně skládají? Mějme $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}$ a $g(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q}$, pak
$$g \circ f(\mathbf{x}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p}).$$
Tedy grupová operace mezi dvojicemi má tvar
$$(\mathbf{B}, \mathbf{q}) \circ (\mathbf{A}, \mathbf{p}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p}).$$
- Jedná se o klasický příklad semidirektního součinu
$$E(n) = ON(n) \ltimes \mathbb{R}^n.$$
- Namísto $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}$ můžeme psát
$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Skládání a inverze funguje tak jak má.
- Jedná se o vnoření $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $GL(n+1)$.

Shodnosti v rovině

Každá přímá shodnost v $\mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & p_x \\ b & a & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

a každá nepřímá shodnost má tvar

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & p_x \\ b & -a & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $a^2 + b^2 = 1$. **Důkaz:** snadný

Jak parametrizovat tuto grupu?

Kružnice $a^2 + b^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.

Jak parametrizovat tuto grupu?

Kružnice $a^2 + b^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.
Ale lze i racionálně stereograﬁckou projekcí.

Jak parametrizovat tuto grupu?

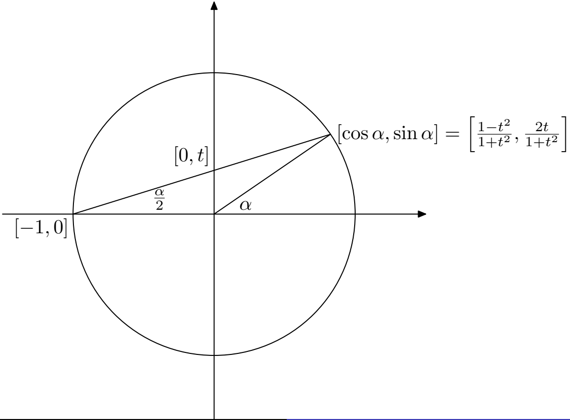
Kružnice $a^2 + b^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$. Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.

$$a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad b = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \text{kde } t = \tan(\alpha/2).$$

Jak parametrizovat tuto grupu?

Kružnice $a^2 + b^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.
Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.

$$a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad b = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \text{kde } t = \tan(\alpha/2).$$



Příklady

- Ověřte, že následující zobrazeníje shodnost reálné roviny a určete samodružné body a směry.

$$x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2. \quad (2)$$

- Nalezněte všechny shodnosti, pro které je bod $[4, 0]$ a směry $\langle(1, 1)\rangle$ a $\langle(1, -1)\rangle$ samodružné.
- Rovnoměrně animujte přesun objektu v rovině z jedné polohy do druhé.
- Analyzujte a vykreslete kuželosečku s rovnicí

$$52x^2 - 72xy + 73y^2 - 280x + 290y + 325 = 0.$$

- Napište v prostoru rovnice osové souměrnosti podle přímky o parametrickém vyjádření $x = 1 + t$, $y = 2 - t$ a $z = 3t$.

Klasifikace shodností v rovině

Věta: Každá přímá shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ je identita nebo posunutí nebo otočení.

Věta: Složení dvou osových souměrností je otočení nebo posunutí (případně identita) a každé otočení či posunutí lze jako složení dvou osových shodností vyjádřit.