Geometrie pro počítačovou grafiku

Diferenciální geometrie křivek

Zbyněk Šír

Matematický ústav UK

Základní definice

- Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (případně neomezený), spojité zobrazení $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrická křivka* v $\mathbb{R}^n$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrická křivka se nazývá *hladká*, jestliže $\mathbf{c}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ (tedy má spojité derivace všech řádů) a *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ pro každé $t \in I$.
- Je-li $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ hladká regulární parametrická křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ hladké bijektivní zobrazení $\tilde{I}$ na I s vlastní a všude nenulovou derivací (tzv. *difeomorfismus*), je

$$\tilde{\mathbf{c}} := \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$$

regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako $\mathbf{c}$. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci*.

Příklady na parametrizaci

- **Hypocykloida.** Uvažujme kružnici o poloměru r, která se valí po vnější straně kružnice o poloměru R. Parametricky popište trajektorii zvoleného bodu na pohyblivé kružnici. Načrtněte tuto křivku pro případ $R = r$, určete parametrický interval na němž se křivka uzavře a spočtěte její délku.
- **Kissoida.** Uvažujme kružnici k o poloměru r a nějakou její tečnu p. Označme jako S bod dotyku přímky p s kružnicí k a nechť bod A leží na kružnici k naproti bodu S. Pro polopřímku q, která vychází z bodu A a která se protíná s přímkou p, označme jako R bod průniku p a q, jako Q bod průniku k a q. Označme jako P bod na q, který splňuje $|A - P| = |Q - R|$. Najděte rovnici, která určuje množinu všech takových bodů P, a najděte parametrický popis této množiny.
- **Vivianiho křivka.** Parametrizujte průnik sféry s válcovou plochou, která prochází středem sféry a má poloviční průměr.

Klíčové pojmy

- Délku křivky $\mathbf{c}(t)$ na intervalu $I = (a, b)$ definujeme jako $\int_a^b ||\mathbf{c}'(t)||dt$, kterýžto integrál nezávisí na změně parametru.
- V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^2$ definujeme *jednotkový tečný vektor*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t)$$

a znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme inflexní.

- Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^2$ zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko.
- Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ_z, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_*$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{Ac}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = (\det \mathbf{A})\kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{At}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = (\det \mathbf{A})A\mathbf{n}_*$.

- Pro každou křivku **c** definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t)\}$ a *normálovou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{n}_*(t)\}$. Dále v každém neinflexním bodě definujeme její *poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{|\kappa_z(t)|}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa_z(t)}\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.
- Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech kružnic). Navíc, jestliže označíme $N(t)$ normálovou přímku v bodě t, pak v každém neinflexním bodě $\mathbf{c}(t_0)$ platí

$$S(t_0) = \lim_{t->t_0} N(t_0) \cap N(t).$$

- V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme *jednotkový tečný vektor* $\mathbf{t}(t)$ a *křivost* $\kappa(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \qquad \kappa(t) = \frac{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

  Bod, ve kterém je křivost nulová se nazývá *inflexní bod*. V každém neinflexním bodě dále definujeme *jednotkový binormálový vektor* $\mathbf{b}(t)$, *jednotkový normálový vektor* $\mathbf{n}(t)$ a *torzi* $\tau(t)$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}, \qquad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$$

$$\tau(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t)|\mathbf{c}'''(t))}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||^2}.$$

  Z definice plyne, že trojice vektorů $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ tvoří v každém neinflexním bodě kladně orientovanou ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$, která se nazývá *Frenetův repér*.

- Je-li $\mathbf{c}(t)$ hladká křivka v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = ||\mathbf{c}'||\kappa\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = ||\mathbf{c}'||(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}), \qquad \mathbf{b}' = -||\mathbf{c}'||\tau\mathbf{n},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(\mathbf{t}'|\mathbf{n}'|\mathbf{b}') = ||\mathbf{c}'||(\mathbf{t}|\mathbf{n}|\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$ jako

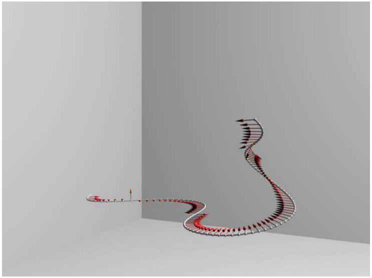
$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b}.$$

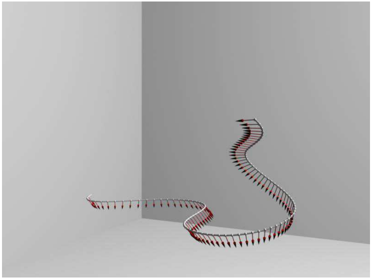
- O ortonormálním repéru $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ řekneme, že je to pro křivku $\mathbf{c}$ repér s minimální rotací (RMF) jestliže pro každou hodnotu parametru platí

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}, \quad \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

  Takový repér je vždy k dispozici a je velmi užitečný pro aplikace.

Vektor s minimální rotací





Nalevo je hlavní normálový vektor, napravo vektor s minimální rotací.

$$\mathbf{v} = \cos\phi(s)\mathbf{N} + \sin\phi(s)\mathbf{B},$$

kde $\phi' = -\tau$.

Pohyb podél křivky

- Mějme křivku v rovině $\mathbf{c}(t)$, pak má matice pohybu po ní tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \mathbf{T}(t)^{\perp} & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \pm\mathbf{N}(t) & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pohyb podél křivky

- Mějme křivku v rovině $\mathbf{c}(t)$, pak má matice pohybu po ní tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \mathbf{T}(t)^{\perp} & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \pm\mathbf{N}(t) & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- V prostoru má matice pohybu tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \mathbf{N}(t) & \mathbf{B}(t) & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pohyb podél křivky

- Mějme křivku v rovině $\mathbf{c}(t)$, pak má matice pohybu po ní tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \mathbf{T}(t)^{\perp} & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \pm\mathbf{N}(t) & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- V prostoru má matice pohybu tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \mathbf{N}(t) & \mathbf{B}(t) & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Možno nahradit pohybem minimizujícím rotaci kolem osy.

Pohyb podél křivky

- Mějme křivku v rovině $\mathbf{c}(t)$, pak má matice pohybu po ní tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \mathbf{T}(t)^{\perp} & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \pm\mathbf{N}(t) & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- V prostoru má matice pohybu tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}(t) & \mathbf{N}(t) & \mathbf{B}(t) & \mathbf{c}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Možno nahradit pohybem minimizujícím rotaci kolem osy.
- Ale pohyb ve 3D je vhodné popsat kvaterniony, ty budeme probírat příště.