Geometrie pro počítačovou grafiku

Příklad 1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky $p : x + 2y + 3 = 0$.

Definice 2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||.$$

Lemma 3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Důkaz. Nechť $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou shodnosti a $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

- Zřejmě $||g(f(\mathbf{X})) - g(f(\mathbf{Y}))|| = ||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$, tedy $g \circ f$ je shodnost.
- Je-li $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$, potom platí $0 = ||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Čili f je prosté.
- Jestliže $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in Im(f)$, pak nalezneme $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $f(\mathbf{P}) = \mathbf{X}$, $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Y}$. Potom platí

  $$||f^{-1}(\mathbf{X}) - f^{-1}(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{P} - \mathbf{Q}|| = ||f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||.$$

  Tedy f^{-1} zachovává vzdálenosti.

□

Věta 4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Důkaz. Poznamenejme, že platí $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce) právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky). Jestliže totiž platí $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ nebo $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, pak $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ a tedy platí i druhá rovnost.

Rovněž si připomeňme, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)^T =\in \mathbb{R}^n$ platí

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}$$

Předpokládejme nejprve, že $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Pro libovolné dva body v $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $\mathbf{Y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned} ||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} - (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{p})|| = ||\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})|| &= \sqrt{(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))^T(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))} \\ = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T(\mathbf{X} - \mathbf{Y})} &= ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}|| \end{aligned}$$

a tedy f je shodné zobrazení.

Naopak předpokládejme, že f je shodnost a chceme ukázat, že je nutně tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$. Definujme body $\mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ pro $i \in \{1, \ldots n\}$ v $\mathbb{R}^n$. Vektory $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{O}$ tvoří ortonormální (kanonickou) bázi $\mathbb{R}^n$.

Ukážeme, že také vektory $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Zobrazení f je shodné, tedy pro každé i dostáváme

$$||\mathbf{f}_i|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})|| = ||\mathbf{E}_i - \mathbf{O}|| = 1$$

a vektory jsou tedy jednotkové. Dále pro každé $i \neq j$ dostáváme

$$||\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O}) - (f(\mathbf{E}_j) - f(\mathbf{O}))|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{E}_j)|| = ||\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j|| = \sqrt{2}$$

a protože

$$2 = ||\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j||^2 = (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 1 + 1 - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$$

dostáváme $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$ a vektory jsou po dvou kolmé.

Definujme nyní matici $\mathbf{A} = (\mathbf{f}_1 | \cdots | \mathbf{f}_n)$, vektor $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a zobrazení $g(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$, které je podle prvním části důkazu shodné a pro jeho invers platí $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{A}^T\mathbf{p}$. Navíc zjevně platí $g(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O})$ a $g(\mathbf{E}_i) = f(\mathbf{E}_i)$ pro všechna i. Definujme konečně $h = g^{-1} \circ f$, které je shodné a pro které tedy platí $h(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ a $h(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$. Dokážeme, že takové h už musí být identické zobrazení.

Uvažujme libovolný bod $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a jeho obraz $h(\mathbf{Y}) = (h_1(\mathbf{Y}), h_2(\mathbf{Y}), \ldots, h_n(\mathbf{Y}))$. Pak platí

$$||h(\mathbf{Y}) - h(O)||^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + h_2^2(\mathbf{Y}) + \cdots + h_n^2(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = ||\mathbf{Y} - \mathbf{O}||^2,$$

$$\begin{aligned} ||h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{E}_i)||^2 = ||h(\mathbf{Y}) - \mathbf{E}_i||^2 &= h_1^2(\mathbf{Y}) + \cdots + (h_i(\mathbf{Y}) - 1)^2 + \cdots + h_n^2(\mathbf{Y}) \\ &= y_1^2 + \cdots + (y_i - 1)^2 + \cdots + y_n^2 = ||\mathbf{Y} - \mathbf{E}_i||^2. \end{aligned}$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $2h_i(\mathbf{Y}) - 1 = 2y_i - 1$, tedy pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ máme $h_i(\mathbf{Y}) = y_i$, tedy h je identita a tedy $f(\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$.

Poznamenejme, že v definici shodnosti se využívá pouze toho, že $\mathbb{R}^n$ je metrický prostor. Tato věta ukazuje hlubokou souvislost s jeho strukturou lineárního prostoru. □

Důsledek 5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Věta 6. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+ \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1)\times(n+1)$, tedy

$$f \to \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz. Plyne triviálně z blokového maticového násobení.

Definice 7. Zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_{+}(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří ortonormální podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin).

Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f.

Věta 8. Každá přímá shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ je identita nebo posunutí nebo otočení.

Důkaz. Podle věty 1.4 je f tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$$

pro nějakou $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Samodružné body f jsou právě řešení soustavy $\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p} \right)$ a samodružné směry f odpovídají vlastním vektorům $\mathbf{A}$. Jestliže je f, přímé, pak $\det(\mathbf{A}) = 1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dále rozlišujeme dva případy:

- $\alpha = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pro $\mathbf{p} = \mathbf{o}$ jde o identitu – pak jsou všechny body samodružné. Pro $\mathbf{p} \neq \mathbf{o}$ jde o posunutí, a to nemá žádné samodružné body (soustava $\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p} \right)$ nemá řešení).
- $\alpha \neq 0$. Potom platí $\det(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 2(1-\cos\alpha) \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení pro libovolné $\mathbf{p}$ a tey f má právě jeden samodružný bod $\mathbf{S}$. Lze psát

  $$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{S}) + \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{S}) + \mathbf{S},$$

  takže jde o otočení kolem $\mathbf{S}$. Pro $\alpha = \pi$ je $\mathbf{A} = -\mathbf{I}_n$, tedy všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem -1 a jde o středovou souměrnost. V opačném případě $\mathbf{A}$ nemá žádné vlastní vektory, tedy f nemá samodružné směry.

$\square$

Definice 9. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (případně neomezený), spojité zobrazení $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrická křivka* v $\mathbb{R}^n$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrická křivka se nazývá *hladká*, jestliže $\mathbf{c}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ (tedy má spojité derivace všech řádů) a *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \ldots, 0)^T$ pro každé $t \in I$.

Definice 10. Délku křivky $\mathbf{c}(t)$ na intervalu $I = (a, b)$ definujeme jako

$$\int_a^b ||\mathbf{c}'(t)||dt,$$

kterýžto integrál nezávisí na změně parametru.

Definice 11. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^2$ definujeme *jednotkový tečný vektor*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t)$$

a znaménkovou křivost

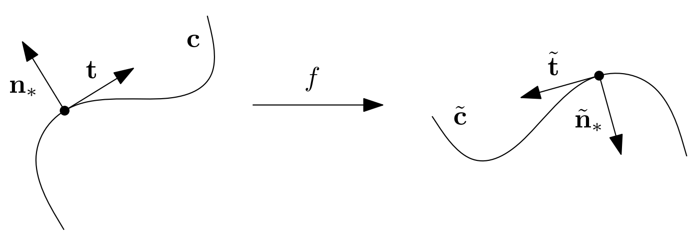
$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme inflexní.

Věta 12. Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ_z, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_*$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{Ac}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = (\det \mathbf{A})\kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{At}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = (\det \mathbf{A})A\mathbf{n}_*$.

Důkaz. Uvědomme si, že $\det A = \pm 1$. Navíc platí, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = A\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = A\mathbf{c}''(t).$$



Tedy

- $$\tilde{\kappa}_z = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'')}{||\tilde{\mathbf{c}}'||^3} = \frac{\det(A\mathbf{c}', A\mathbf{c}'')}{||A\mathbf{c}'||^3} = \frac{\det(A)\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{||\mathbf{c}'||^3} = (\det A)\kappa_z,$$

  neboť pro libovolný vektor $||v|| = \sqrt{v^T v} \Rightarrow ||Av|| = \sqrt{(Av)^T Av} = \sqrt{v^T A^T Av} = \sqrt{v^T v} = ||v||$.

- $\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{||\tilde{\mathbf{c}}'||} = \frac{A\mathbf{c}'}{||A\mathbf{c}'||} = A(\frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||}) = A\mathbf{t}$

- $\tilde{\mathbf{n}}_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A\mathbf{t} = \det(A)A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \det(A)A\mathbf{n}_*.$

$\square$

Definice 13. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme *jednotkový tečný vektor* $\mathbf{t}(t)$ a *křivost* $\kappa(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \qquad \kappa(t) = \frac{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je křivost nulová se nazývá *inflexní bod*. V každém neinflexním bodě dále definujeme *jednotkový binormálový vektor* $\mathbf{b}(t)$, *jednotkový normálový vektor* $\mathbf{n}(t)$ a *torzi* $\tau(t)$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}, \qquad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t), \qquad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t)|\mathbf{c}'''(t))}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||^2}.$$

Z definice plyne, že trojice vektorů $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ tvoří v každém neinflexním bodě kladně orientovanou ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$, která se nazývá *Frenetův repér*.

Věta 14 (Frenetovy vzorce)**.** Je-li $\mathbf{c}(t)$ hladká křivka v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = ||\mathbf{c}'||\kappa\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = ||\mathbf{c}'||(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}), \qquad \mathbf{b}' = -||\mathbf{c}'||\tau\mathbf{n},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(\mathbf{t}'|\mathbf{n}'|\mathbf{b}') = ||\mathbf{c}'||(\mathbf{t}|\mathbf{n}|\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$ jako

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b}.$$

Věta 15. RMF podél křivky, doplnit

Definice 16. Připomeňme si z LA, že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso (označované $\mathbb{H}$) a mají tvar $q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, přičemž $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ a $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. V této přednášce budeme s nazývat skalární část, vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorová část a budeme kvaterniony zapisovat ve tvaru

$$q = (s, \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{v}}).$$

Reálná čísla jsou do kvaternionů vnořena jako $s \to (s, \mathbf{0})$ a vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ je do nich vnořen jako $\mathbf{v} \to (0, \mathbf{v})$.

Lemma 17 (Geometrický význam kvaternionových operací)**.** Pro libovolné kvaterniony $q_1 = (s_1, \mathbf{v}_1)$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v}_2)$ platí

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (s_1 + s_2, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) \\ q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} + s_1 \mathbf{v_2} + s_2 \mathbf{v_1}). \end{aligned}$$

Důkaz. Plyne přímo z rozepsání q_1 a q_2 pomocí čtyř složek.

Definice 18. Pro libovolný kvaternion $q = (s, \mathbf{v})$ definujeme konjugovaný kvaternion $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$ a jeho normu $||q|| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Kvaterniony, které mají normu rovnou 1 nazýváme jednotkové.

Lemma 19. Jednotkové kvaterniony (označované $\mathbb{H}_1$) tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos\alpha, \mathbf{n} \sin\alpha),$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

Důkaz. Snadno ověříme, že pro libovolné dva kvaterniony platí $\overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$. Multiplikativní invers jednotkového kvaternionu q je $\overline{q}$, protože $q\overline{q} = 1 = \overline{q}q$ a $||\overline{q}|| = ||q|| = 1$. Dále jsou-li q_1, q_2 jednotkové kvaterniony, pak

$$||q_1 q_2|| = \sqrt{(q_1 q_2)\overline{(q_1 q_2)}} = \sqrt{q_1 (q_2\, \overline{q_2}) \overline{q_1}} = \sqrt{q_1 \overline{q_1}} = 1,$$

tedy $q_1 q_2$ je jednotkový kvaternion. Jednotkové kvaterniony tak tvoří neprázdnou podmnožinu multiplikativní grupy všech nenulových kvaternionů uzavřenou na skládání a inverze, čili podgrupu.

Je-li $q = (s, \mathbf{v})$ jednotkový kvaternion a $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, potom nutně

$$|s| = \sqrt{||q||^2 - ||\mathbf{v}||^2} < 1.$$

Jediná možná vyhovující volba $\alpha \in (0, \pi)$ je $\alpha = \arccos s$. Z toho plyne

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{||q||^2 - s^2} = \sin\alpha,$$

tedy $q = (s, \mathbf{v}) = (\cos\alpha, \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \sin\alpha)$ a označíme $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$. □

Věta 20. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha)$ je lineární zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované jako
$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$
otočení kolem osy $\mathbf{n}$ úhel 2α v kladném směru.

Příklad 21. Vypočítejte vektor, který vznikne otočením vektoru $(1,0,0)$ kolem vektoru $\vec{n} = (3,4,0)$ o úhel $\phi = \pi/3$ v kladném směru.

Definice 22. Mějme vektorový prostor V^{n+1} dimenze $(n+1)$ nad tělesem T. Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů V nazveme projektivním prostorem dimenze n nad tělesem T a označujeme ho $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nebo zkráceně jen $\mathbb{P}^n$:
$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1}) = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$
Prvky této množiny nazýváme projektivní body a odpovídající vektory $\mathbf{v}$ jejich vektorové zástupce. Zjevně, jestliže $\mathbf{v}$ je vektorovým zástupcem X, pak pro libovelné $0 \neq \lambda \in T$ je i $\lambda\mathbf{v}$ vektorovým zástupcem X.

Definice 23. Mějme vektorový prostor V dimenze $n+1$ nad tělesem T a odpovídající projektivní prostor $\mathbb{P}_n$. Libovolnou bázi $(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_{n+1})$ nazveme *soustavou projektivních souřadnic* prostoru $\mathbb{P}_n$. Souřadnicemi bodu $X \in \mathbb{P}_n$ pak rozumíme uspořádanou $n+1$-tici skalárů $(c_1, \dots c_{n+1})$ takovou, že
$$X = LO\{\sum_{i=1}^{n+1} c_i\mathbf{v}_i\}.$$
Tyto souřadnice jsou dány až na násobek, protože pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(c_1, \dots c_{n+1})$ a $(\lambda c_1, \dots \lambda c_{n+1})$ určují stejný projektivní bod X. Proto se těmto souřadnicím někdy říká *homogenní* a zjevně vždy alespoň jedno c_i musí být nenulové. Konečně pro libovolné $0 \neq \mu \in T$ zjevně báze $(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_{n+1})$ a $(\mu\mathbf{v}_1, \dots \mu\mathbf{v}_{n+1})$ určují stejný systém projektivních souřadnic.

Definice 24. Podmnožinu $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ nazveme projektivním podprostorem dimenze k, jestliže existuje vektorový podprostor $V^{k+1} \leq V^{n+1}$ dimenze $(k+1)$ tak, že
$$\mathbb{P}^k = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$
Projektivní (pod)prostor dimenze 0 nazýváme bod, (pod)prostor dimenze 1 přímka, (pod)prostor dimenze 2 rovina a podprostor maximální dimenze $(n-1)$ nadrovina. Řekneme, že bod $LO\{\mathbf{w}\}$ leží v podprostoru $\mathbb{P}^k$, jestliže $LO\{\mathbf{w}\} \leq V^{k+1}$.

Definice 25. Jestliže $\mathbb{P}(V^{k+1})$ je podprostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ a $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k+1})$ nějaká báze V^{k+1}, pak lze každý bod $X \in \mathbb{P}(V^{k+1})$ vyjádřit jako
$$X = LO\{\sum_{i=1}^{k+1} t_i\mathbf{w}_i\}.$$
Tomuto vyjádření říkáme *parametrické vyjádření podprostoru*. Pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(t_1, \dots t_{k+1})$ a $(\lambda t_1, \dots \lambda t_{k+1})$ určují stejný projektivní bod X.

Definice 26. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T. Každá nadrovina $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ může být popsána pomocí nenulové lineární, která je prvkem duálního prostoru formy $\ell \in V_*^{n+1}$:

$$\mathbb{P}^{n-1} = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, \ell(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Toto vyjádření nazýváme rovnicové vyjádření nadroviny. Navíc, pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ popisuje $\lambda\ell$ tutéž nadrovinu. Souřadnice lineární formy označujeme jako řádky s hvězdičkou.

Příklad 27 (Výpočty v projektiní rovině.)**.** V projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka a každé dvě různé přímky se protnou v jednom bodě. Mějme zadány body $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, -1)$, $C(0, 1, 1)$, $D(5, 2, 1)$. Určete bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.

Definice a lemma 28. Mějme v projektivním prostoru $\mathbb{P}^n$ nad tělesem T čtyři navzájem zůzné body A, B, C, D, které leží na jedné projektivní přímce. Nechť $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a nechť platí

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pak definuji *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2} \in T,$$

kterýžto výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže $(A, B, C, D) = -1$ řekneme, že uspořádaná čtveřice bodů tvoří *harmonickou čtveřici*.

Důkaz. Vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ jsou nenulové (každý je zástupcem projektivního bodu, tedy generuje jednodimenzionální podprostor), žádný není násobkem jiného (projektivní body jsou různé) a leží v dvoudimenzionálním prostoru (body leží na projektivní přímce). Libovolné dva z nich tedy tvoří bázi onoho dvoudimenzionálního prostoru.

Navíc uvedený zlomek definující dvojpoměr nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže namísto vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ zvolíme jako jiné zástupce jejich násobky

$$\tilde{\mathbf{a}} = \lambda_a\mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \lambda_b\mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \lambda_c\mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \lambda_d\mathbf{d},$$

pak platí

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}} &= \underbrace{\frac{\lambda_c}{\lambda_a}\alpha_1}_{\tilde{\alpha}_1}\tilde{\mathbf{a}} + \underbrace{\frac{\lambda_c}{\lambda_b}\beta_1}_{\tilde{\beta}_1}\tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{d}} &= \underbrace{\frac{\lambda_d}{\lambda_a}\alpha_2}_{\tilde{\alpha}_2}\tilde{\mathbf{a}} + \underbrace{\frac{\lambda_d}{\lambda_b}\beta_2}_{\tilde{\beta}_2}\tilde{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1}{\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_2} = \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}.$$

Poznámka 29. Pro permutace pořadí bodů platí rovnosti

$$(B, A, C, D) = (A, B, D, C) = (A, B, C, D)^{-1}$$

$$(A, C, B, D) = (D, B, C, A) = 1 - (A, B, C, D)$$

Definice 30. Mějme dva projektivní prostory $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}(V^{m+1})$ a $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(V^{n+1})$ nad stejným tělesem T a nějakou podmnožinu $A \subset \mathbf{P}^m$. O zobrazení

$$F : A \to \mathbf{P}^n$$

řekneme, že je projektivní, jestliže existuje lineární zobrazení $\bar{F} : V^{m+1} \to V^{n+1}$ tak, že pro každé $\mathbf{v} \in V^{m+1}$ takové, že $LO\{\mathbf{v}\} \in A$ platí

$$F(LO\{\mathbf{v}\}) = LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\}.$$

Poznámka 31. Omezení na podmnožinu A v definici 30 je nutné z toho důvodu, že když lineární zobrazení $\bar{F}$ není prosté, tak zobrazení F nemůže být definováno na bodech reprezentovaných vektory z $\ker \bar{F}$, neboť $LO\{\mathbf{0}\}$ není projektivní bod. Jestliže je $\bar{F}$ prosté, pak je F definováno na celém prostoru $\mathbb{P}^n$, v opačném případě na doplňku projektivního podprostoru (odpovídajícího $\ker \bar{F}$). Budeme studovat zejména projektivní zobrazení na témže prostoru (tedy $m = n$) generovaná regulárními lineárními zobrazeními na V^{n+1}.

Věta 32. Projektivní zobrazení $F : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ z afinního prostoru do sebe jsou bijektivní právě tehdy, když odpovídající lineární zobrazení $\bar{F}$ jsou bijektivní. Tato zobrazení F nazveme *projektivní transformace*. Všechny projektivní transformace daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání, která se nazývá *projektivní grupa*.

Věta 33. Projektivní transformace zachovávají dvojpoměr. Jestli-že je tedy F projektivní transformace, pak

$$(A, B, C, D) = (F(A), F(B), F(C), F(D)).$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou vektoroví reprezentanti bodů A, B, C, D a dále nechť

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} F(C) &= \bar{F}(\mathbf{c}) = \bar{F}(\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}) = \alpha_1 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_1 \bar{F}(\mathbf{b}) \\ F(D) &= \bar{F}(\mathbf{d}) = \bar{F}(\alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}) = \alpha_2 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_2 \bar{F}(\mathbf{b}), \end{aligned}$$

kde $\bar{F}$ je lineární zobrazení příslušné F. Vektory $\bar{F}(\mathbf{a}), \bar{F}(\mathbf{b}), \bar{F}(\mathbf{c})$ a $\bar{F}(\mathbf{d})$ reprezentují body $F(A), F(B), F(C)$ a $F(D)$. Vidíme, že F zachovává koeficienty lineární kombinace, a proto se dvojpoměr nezmění. □

Věta 34. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n+2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje projektivní soustava souřadnic taková, že

$$\begin{aligned} X_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ X_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ X_n &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ X_{n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 1) \\ X_{n+2} &= (1, 1, \dots, 1, 1). \end{aligned}$$

Důkaz. Body $X_1, \dots, X_{n+1}$ lze vyjádřit jako $X_1 = LO\{\mathbf{v}_1\}, X_2 = LO\{\mathbf{v}_2\}, \dots, X_{n+1} = LO\{\mathbf{v}_{n+1}\}$, kde $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1} \in V^{n+1}$ jsou lineárně nezávislé vektory. Označme $B_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ bázi prostoru V^{n+1}. Souřadnice bodu X_i vzhledem k soustavě projektivních souřadnic C prostoru $\mathbb{P}^n$ budeme značit $[X_i]_C$. Pak máme

$$\begin{aligned} [X_1]_{B_1} &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ [X_2]_{B_1} &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ [X_n]_{B_1} &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ [X_{n+1}]_{B_1} &= (0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Uvažujme $[X_{n+2}]_{B_1} = (c_1, \dots, c_{n+1})$. Všechna čísla c_i jsou nenulová, jinak by totiž X_{n+2} ležel v nějaké nadrovině společně s n body X_i, a to je spor s předpoklady věty. Položme $B_2 = (c_1\mathbf{v}_1, c_2\mathbf{v}_2, \dots, c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1})$ projektivní soustavu souřadnic. Pak ale můžeme zapsat

$$\begin{aligned} [X_1]_{B_2} &= (c_1^{-1}, 0, \dots, 0, 0) = (1, 0, \dots, 0, 0) \\ [X_2]_{B_2} &= (0, c_2^{-1}, \dots, 0, 0) = (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ [X_n]_{B_2} &= (0, 0, \dots, c_n^{-1}, 0) = (0, 0, \dots, 1, 0) \\ [X_{n+1}]_{B_2} &= (0, 0, \dots, 0, c_{n+1}^{-1}) = (0, 0, \dots, 0, 1) \\ [X_{n+2}]_{B_2} &= (1, 1, \dots, 1, 1), \end{aligned}$$

jelikož souřadnice bodu projektivního prostoru vynásobené nenulovou konstantou určují stejný bod. $\square$

Důsledek 35. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n+2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině a také $n+2$ bodů $Y_1, \dots, Y_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje právě jedno projektivní zobrazení $F : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, pro které platí

$$F(X_i) = Y_i, \qquad i = 1, \dots, (n+2).$$

Důkaz. Nechť $X_i = LO\{\mathbf{x}_i\}$ a $X_i = LO\{\mathbf{y}_i\}$. V duchu důkazu Věty (34) nalezneme jednoznačně (až na případný společný stejný násobek) skaláry c_i tak, aby lineární zobrazení dané jednoznačně předpisem $\bar{F}(\mathbf{x}_i) = c_i\mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ splnilo i $\bar{F}(\mathbf{x}_{n+2}) = \mathbf{y}_{n+2}$.