

Geometrie pro počítačovou grafiku

Příklad 1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky $p : x + 2y + 3 = 0$.

Definice 2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Lemma 3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Důkaz. Necht' $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou shodnosti a $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

- Zřejmě $\|g(f(\mathbf{X})) - g(f(\mathbf{Y}))\| = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $g \circ f$ je shodnost.
- Je-li $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$, potom platí $0 = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Čili f je prosté.
- Jestliže $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{Im}(f)$, pak nalezneme $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $f(\mathbf{P}) = \mathbf{X}$, $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Y}$. Potom platí

$$\|f^{-1}(\mathbf{X}) - f^{-1}(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\| = \|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Tedy f^{-1} zachovává vzdálenosti.

□

Věta 4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a \mathbf{A} je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Důkaz. Poznamenejme, že platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (to jest \mathbf{A} má ortonormální sloupce) právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ (to jest \mathbf{A} má ortonormální řádky). Jestliže totiž platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ nebo $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, pak $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ a tedy platí i druhá rovnost.

Rovněž si připomeňme, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

Předpokládejme nejprve, že $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Pro libovolné dva body v \mathbb{R}^n : $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| &= \|\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} - (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{p})\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})\| = \sqrt{(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))^T (\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))} \\ &= \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \end{aligned}$$

a tedy f je shodné zobrazení.

(OPAČNÁ IMPLIKACE SE NEBUDE ZKOUŠET, JEN PRO ZAJÍMAVOST)

Naopak předpokládejme, že f je shodnost a chceme ukázat, že je nutně tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Definujme body $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ v \mathbb{R}^n . Vektory $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{O}$ tvoří ortonormální (kanonickou) bázi \mathbb{R}^n .

Ukážeme, že také vektory $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})$ tvoří ortonormální bázi \mathbb{R}^n . Zobrazení f je shodné, tedy pro každé i dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{O}\| = 1$$

a vektory jsou tedy jednotkové. Dále pro každé $i \neq j$ dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O}) - (f(\mathbf{E}_j) - f(\mathbf{O}))\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{E}_j)\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j\| = \sqrt{2}$$

a protože

$$2 = \|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\|^2 = (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 1 + 1 - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$$

dostáváme $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$ a vektory jsou po dvou kolmé.

Definujme nyní matici $\mathbf{A} = (\mathbf{f}_1 | \dots | \mathbf{f}_n)$, vektor $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a zobrazení $g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, které je podle první části důkazu shodné a pro jeho invers platí $g^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{A}^T\mathbf{p}$. Navíc zjevně platí $g(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O})$ a $g(\mathbf{E}_i) = f(\mathbf{E}_i)$ pro všechna i . Definujme konečně $h = g^{-1} \circ f$, které je shodné a pro které tedy platí $h(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ a $h(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$. Dokážeme, že takové h už musí být identické zobrazení.

Uvažujme libovolný bod $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a jeho obraz $h(\mathbf{Y}) = (h_1(\mathbf{Y}), h_2(\mathbf{Y}), \dots, h_n(\mathbf{Y}))$. Pak platí

$$\|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{O})\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + h_2^2(\mathbf{Y}) + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{O}\|^2,$$

$$\begin{aligned} \|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{E}_i)\|^2 &= \|h(\mathbf{Y}) - \mathbf{E}_i\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + \dots + (h_i(\mathbf{Y}) - 1)^2 + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) \\ &= y_1^2 + \dots + (y_i - 1)^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{E}_i\|^2. \end{aligned}$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $2h_i(\mathbf{Y}) - 1 = 2y_i - 1$, tedy pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $h_i(\mathbf{Y}) = y_i$, tedy h je identita a tedy $f(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$.

Poznamenejme, že v definici shodnosti se využívá pouze toho, že \mathbb{R}^n je metrický prostor. Tato věta ukazuje hlubokou souvislost s jeho strukturou lineárního prostoru. \square

Důsledek 5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Věta 6. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz. Plyne triviálně z blokového maticového násobení.

Definice 7. Zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je \mathbf{A} jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž \mathbb{R}^n . Zobrazení, pro která je \mathbf{p} nulový vektor tvoří ortonormální podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin).

Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané maticí \mathbf{A} nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f .

Věta 8. Každá přímá shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ je identita nebo posunutí nebo otočení.

Důkaz. Podle věty 1.4 je f tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$$

pro nějakou $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Samodružné body f jsou právě řešení soustavy $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ a samodružné směry f odpovídají vlastním vektorům \mathbf{A} . Jestliže je f , přímé, pak $\det(\mathbf{A}) = 1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dále rozlišujeme dva případy:

- $\alpha = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pro $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ jde o identitu – pak jsou všechny body samodružné. Pro $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ jde o posunutí, a to nemá žádné samodružné body (soustava $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ nemá řešení).
- $\alpha \neq 0$. Potom platí $\det(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 2(1 - \cos \alpha) \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení pro libovolné \mathbf{p} a tedy f má právě jeden samodružný bod \mathbf{S} . Lze psát

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{AS} + \mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{S},$$

takže jde o otočení kolem \mathbf{S} . Pro $\alpha = \pi$ je $\mathbf{A} = -\mathbf{I}_n$, tedy všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem -1 a jde o středovou souměrnost. V opačném případě \mathbf{A} nemá žádné vlastní vektory, tedy f nemá samodružné směry.

□

Věta 9. Složení dvou osových souměrností je otočení nebo posunutí (případně identita). Navíc každé otočení či posunutí lze jako složení dvou osových shodností vyjádřit.

Důkaz. Složení dvou souměrností je přímé zobrazení a podle Věty 8 jde o identitu, otočení nebo posunutí. Naopak mějme ...

Definice 10. Připomeňme si z LA, že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso (označované \mathbb{H}) a mají tvar $q = s + xi + yj + zk$, přičemž $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ a $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. V této přednášce budeme s nazývat skalární část, vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorová část a budeme kvaterniony zapisovat ve tvaru

$$q = (s, \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{v}}).$$

Reálná čísla jsou do kvaternionů vnořena jako $s \rightarrow (s, \mathbf{0})$ a vektorový prostor \mathbb{R}^3 je do nich vnořeno jako $\mathbf{v} \rightarrow (0, \mathbf{v})$.

Lemma 11 (Geometrický význam kvaternionových operací). Pro libovolné kvaterniony $q_1 = (s_1, \mathbf{v}_1)$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v}_2)$ platí

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Důkaz. Plyne přímo z rozepsání q_1 a q_2 pomocí čtyř složek.

Definice 12. Pro libovolný kvaternion $q = (s, \mathbf{v})$ definujeme konjugovaný kvaternion $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$ a jeho normu $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Kvaterniony, které mají normu rovnou 1 nazýváme jednotkové.

Lemma 13. Jednotkové kvaterniony (označované \mathbb{H}_1) tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha),$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

Důkaz. Snadno ověříme, že pro libovolné dva kvaterniony platí $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$. Multiplikativní inverz jednotkového kvaternionu q je \bar{q} , protože $q\bar{q} = 1 = \bar{q}q$ a $\|\bar{q}\| = \|q\| = 1$. Dále jsou-li q_1 , q_2 jednotkové kvaterniony, pak

$$\|q_1 q_2\| = \sqrt{(q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2})} = \sqrt{q_1 (q_2 \bar{q}_2) \bar{q}_1} = \sqrt{q_1 \bar{q}_1} = 1,$$

tedy $q_1 q_2$ je jednotkový kvaternion. Jednotkové kvaterniony tak tvoří neprázdnou podmnožinu multiplikativní grupy všech nenulových kvaternionů uzavřenou na skládání a inverze, čili podgrupu.

Je-li $q = (s, \mathbf{v})$ jednotkový kvaternion a $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, potom nutně

$$|s| = \sqrt{\|q\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2} < 1.$$

Jediná možná vyhovující volba $\alpha \in (0, \pi)$ je $\alpha = \arccos s$. Z toho plyne

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\|q\|^2 - s^2} = \sin \alpha,$$

tedy $q = (s, \mathbf{v}) = (\cos \alpha, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \sin \alpha)$ a označíme $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. □

Věta 14. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha)$ je lineární zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované jako

$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$

otočení kolem osy \mathbf{n} úhel 2α v kladném směru.

Příklad 15. Vypočítejte vektor, který vznikne otočením vektoru $(1, 0, 0)$ kolem vektoru $\vec{n} = (3, 4, 0)$ o úhel $\phi = \pi/3$ v kladném směru.

Definice 16. Mějme vektorový prostor V^{n+1} dimenze $(n + 1)$ nad tělesem T . Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů V nazveme projektivním prostorem dimenze n nad tělesem T a označujeme ho $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nebo zkráceně jen \mathbb{P}^n :

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1}) = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Prvky této množiny nazýváme projektivní body a odpovídající vektory \mathbf{v} jejich vektorové zástupce. Zjevně, jestliže \mathbf{v} je vektorovým zástupcem X , pak pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ je i $\lambda\mathbf{v}$ vektorovým zástupcem X .

Definice 17. Mějme vektorový prostor V dimenze $n + 1$ nad tělesem T a odpovídající projektivní prostor \mathbb{P}_n . Libovolnou bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ nazveme *soustavou projektivních souřadnic* prostoru \mathbb{P}_n . Souřadnicemi bodu $X \in \mathbb{P}_n$ pak rozumíme uspořádanou $n + 1$ -tici skalárů (c_1, \dots, c_{n+1}) takovou, že

$$X = LO\left\{\sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{v}_i\right\}.$$

Tyto souřadnice jsou dány až na násobek, protože pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně (c_1, \dots, c_{n+1}) a $(\lambda c_1, \dots, \lambda c_{n+1})$ určují stejný projektivní bod X . Proto se těmito souřadnicím někdy říká *homogenní* a zjevně vždy alespoň jedno c_i musí být nenulové. Konečně pro libovolné $0 \neq \mu \in T$ zjevně báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ a $(\mu\mathbf{v}_1, \dots, \mu\mathbf{v}_{n+1})$ určují stejný systém projektivních souřadnic.

Definice 18. Podmnožinu $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ nazveme projektivním podprostorem dimenze k , jestliže existuje vektorový podprostor $V^{k+1} \leq V^{n+1}$ dimenze $(k + 1)$ tak, že

$$\mathbb{P}^k = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Projektivní (pod)prostor dimenze 0 nazýváme bod, (pod)prostor dimenze 1 přímka, (pod)prostor dimenze 2 rovina a podprostor maximální dimenze $(n - 1)$ nadrovina. Řekneme, že bod $LO\{\mathbf{w}\}$ leží v podprostoru \mathbb{P}^k , jestliže $LO\{\mathbf{w}\} \leq V^{k+1}$.

Definice 19. Jestliže $\mathbb{P}(V^{k+1})$ je podprostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ a $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k+1})$ nějaká báze V^{k+1} , pak lze každý bod $X \in \mathbb{P}(V^{k+1})$ vyjádřit jako

$$X = LO\left\{\sum_{i=1}^{k+1} t_i \mathbf{w}_i\right\}.$$

Tomuto vyjádření říkáme *parametrické vyjádření podprostoru*. Pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně (t_1, \dots, t_{k+1}) a $(\lambda t_1, \dots, \lambda t_{k+1})$ určují stejný projektivní bod X .

Definice 20. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T . Každá nadrovina $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ může být popsána pomocí nenulové lineární, která je prvkem duálního prostoru formy $\ell \in V_*^{n+1}$:

$$\mathbb{P}^{n-1} = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, \ell(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Toto vyjádření nazýváme *rovnice vyjádření nadroviny*. Navíc, pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ popisuje $\lambda \ell$ tutéž nadrovinu. Souřadnice lineární formy označujeme jako řádky s hvězdičkou.

Příklad 21 (Výpočty v projektivní rovině.). V projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka a každé dvě různé přímky se protnou v jednom bodě. Mějme zadány body $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, -1)$, $C(0, 1, 1)$, $D(5, 2, 1)$. Určete bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.

Definice a lemma 22. Mějme v projektivním prostoru \mathbb{P}^n nad tělesem T čtyři navzájem různá body A, B, C, D , které leží na jedné projektivní přímce. Necht' $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a necht' platí

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pak definuji *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in T,$$

kterýžto výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže $(A, B, C, D) = -1$ řekneme, že uspořádaná čtveřice bodů tvoří *harmonickou čtveřici*.

Důkaz. Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou nenulové (každý je zástupcem projektivního bodu, tedy generuje jednodimenzionální podprostor), žádný není násobkem jiného (projektivní body jsou různé) a leží v dvoudimenzionálním prostoru (body leží na projektivní přímce). Libovolné dva z nich tedy tvoří bázi onoho dvoudimenzionálního prostoru.

Navíc uvedený zlomek definující dvojpoměr nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže namísto vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ zvolíme jako jiné zástupce jejich násobky

$$\tilde{\mathbf{a}} = \lambda_a \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \lambda_b \mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \lambda_c \mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \lambda_d \mathbf{d},$$

pak platí

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{c}} &= \underbrace{\frac{\lambda_c}{\lambda_a} \alpha_1}_{\tilde{\alpha}_1} \tilde{\mathbf{a}} + \underbrace{\frac{\lambda_c}{\lambda_b} \beta_1}_{\tilde{\beta}_1} \tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{d}} &= \underbrace{\frac{\lambda_d}{\lambda_a} \alpha_2}_{\tilde{\alpha}_2} \tilde{\mathbf{a}} + \underbrace{\frac{\lambda_d}{\lambda_b} \beta_2}_{\tilde{\beta}_2} \tilde{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{\tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_1}{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2} = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2}.$$

Poznámka 23. Pro permutace pořadí bodů platí rovnosti

$$\begin{aligned}(B, A, C, D) &= (A, B, D, C) = (A, B, C, D)^{-1} \\ (A, C, B, D) &= (D, B, C, A) = 1 - (A, B, C, D)\end{aligned}$$

Definice 24. Mějme dva projektivní prostory $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}(V^{m+1})$ a $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(V^{n+1})$ nad stejným tělesem T a nějakou podmnožinu $A \subset \mathbf{P}^m$. O zobrazení

$$F : A \rightarrow \mathbf{P}^n$$

řekneme, že je projektivní, jestliže existuje lineární zobrazení $\bar{F} : V^{m+1} \rightarrow V^{n+1}$ tak, že pro každé $\mathbf{v} \in V^{m+1}$ takové, že $LO\{\mathbf{v}\} \in A$ platí

$$F(LO\{\mathbf{v}\}) = LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\}.$$

Poznámka 25. Omezení na podmnožinu A v definici 24 je nutné z toho důvodu, že když lineární zobrazení \bar{F} není prosté, tak zobrazení F nemůže být definováno na bodech reprezentovaných vektory z $\ker \bar{F}$, neboť $LO\{\mathbf{0}\}$ není projektivní bod. Jestliže je \bar{F} prosté, pak je F definováno na celém prostoru \mathbb{P}^n , v opačném případě na doplňku projektivního podprostoru (odpovídajícího $\ker \bar{F}$). Budeme studovat zejména projektivní zobrazení na témže prostoru (tedy $m = n$) generovaná regulárními lineárními zobrazeními na V^{n+1} .

Věta 26. Projektivní zobrazení $F : \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ z afinního prostoru do sebe jsou bijektivní právě tehdy, když odpovídající lineární zobrazení \bar{F} jsou bijektivní. Tato zobrazení F nazveme *projektivní transformace*. Všechny projektivní transformace daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání, která se nazývá *projektivní grupa*.

Věta 27. Projektivní transformace zachovávají dvojpoměr. Jestliže je tedy F projektivní transformace, pak

$$(A, B, C, D) = (F(A), F(B), F(C), F(D)).$$

Důkaz. Necht' $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou vektoroví reprezentanti bodů A, B, C, D a dále necht'

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned}F(C) &= \bar{F}(\mathbf{c}) = \bar{F}(\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}) = \alpha_1 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_1 \bar{F}(\mathbf{b}) \\ F(D) &= \bar{F}(\mathbf{d}) = \bar{F}(\alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}) = \alpha_2 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_2 \bar{F}(\mathbf{b}),\end{aligned}$$

kde \bar{F} je lineární zobrazení příslušné F . Vektory $\bar{F}(\mathbf{a}), \bar{F}(\mathbf{b}), \bar{F}(\mathbf{c})$ a $\bar{F}(\mathbf{d})$ reprezentují body $F(A), F(B), F(C)$ a $F(D)$. Vidíme, že F zachovává koeficienty lineární kombinace, a proto se dvojpoměr nezmění. \square

Věta 28. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n + 2$ bodů X_1, \dots, X_{n+2} z nichž žádných $n + 1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje projektivní soustava souřadnic taková, že

$$\begin{aligned}X_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ X_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ X_n &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ X_{n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 1) \\ X_{n+2} &= (1, 1, \dots, 1, 1).\end{aligned}$$

Důkaz. Body X_1, \dots, X_{n+1} lze vyjádřit jako $X_1 = LO\{\mathbf{v}_1\}, X_2 = LO\{\mathbf{v}_2\}, \dots, X_{n+1} = LO\{\mathbf{v}_{n+1}\}$, kde $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1} \in V^{n+1}$ jsou lineárně nezávislé vektory. Označme $B_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ bázi prostoru V^{n+1} . Souřadnice bodu X_i vzhledem k soustavě projektivních souřadnic C prostoru \mathbb{P}^n budeme značit $[X_i]_C$. Pak máme

$$\begin{aligned}[X_1]_{B_1} &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ [X_2]_{B_1} &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ [X_n]_{B_1} &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ [X_{n+1}]_{B_1} &= (0, 0, \dots, 0, 1).\end{aligned}$$

Uvažujme $[X_{n+2}]_{B_1} = (c_1, \dots, c_{n+1})$. Všechna čísla c_i jsou nenulová, jinak by totiž X_{n+2} ležel v nějaké nadrovině společně s n body X_i , a to je spor s předpoklady věty. Položme $B_2 =$

$(c_1\mathbf{v}_1, c_2\mathbf{v}_2, \dots, c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1})$ projektivní soustavu souřadnic. Pak ale můžeme zapsat

$$\begin{aligned} [X_1]_{B_2} &= (c_1^{-1}, 0, \dots, 0, 0) = (1, 0, \dots, 0, 0) \\ [X_2]_{B_2} &= (0, c_2^{-1}, \dots, 0, 0) = (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ [X_n]_{B_2} &= (0, 0, \dots, c_n^{-1}, 0) = (0, 0, \dots, 1, 0) \\ [X_{n+1}]_{B_2} &= (0, 0, \dots, 0, c_{n+1}^{-1}) = (0, 0, \dots, 0, 1) \\ [X_{n+2}]_{B_2} &= (1, 1, \dots, 1, 1), \end{aligned}$$

jelikož souřadnice bodu projektivního prostoru vynásobené nenulovou konstantou určují stejný bod. \square

Důsledek 29. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n + 2$ bodů X_1, \dots, X_{n+2} z nichž žádných $n + 1$ neleží v jedné nadrovině a také $n + 2$ bodů Y_1, \dots, Y_{n+2} z nichž žádných $n + 1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje právě jedno projektivní zobrazení $F : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, pro které platí

$$F(X_i) = Y_i, \quad i = 1, \dots, (n + 2).$$

Důkaz. Necht' $X_i = LO\{\mathbf{x}_i\}$ a $Y_i = LO\{\mathbf{y}_i\}$. V duchu důkazu Věty (28) nalezneme jednoznačně (až na případný společný stejný násobek) skaláry c_i tak, aby lineární zobrazení dané jednoznačně předpisem $\bar{F}(\mathbf{x}_i) = c_i\mathbf{y}_i, i = 1, \dots, n + 1$ splnilo i $\bar{F}(\mathbf{x}_{n+2}) = \mathbf{y}_{n+2}$.