

Geometrie pro počítačovou grafiku

Příklad 1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky $p : x + 2y + 3 = 0$.

Definice 2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Lemma 3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Důkaz. Necht' $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou shodnosti a $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

- Zřejmě $\|g(f(\mathbf{X})) - g(f(\mathbf{Y}))\| = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $g \circ f$ je shodnost.
- Je-li $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$, potom platí $0 = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Čili f je prosté.
- Jestliže $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{Im}(f)$, pak nalezneme $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $f(\mathbf{P}) = \mathbf{X}$, $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Y}$. Potom platí

$$\|f^{-1}(\mathbf{X}) - f^{-1}(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\| = \|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Tedy f^{-1} zachovává vzdálenosti.

□

Věta 4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a \mathbf{A} je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Důkaz. Poznamenejme, že platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (to jest \mathbf{A} má ortonormální sloupce) právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ (to jest \mathbf{A} má ortonormální řádky). Jestliže totiž platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ nebo $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, pak $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ a tedy platí i druhá rovnost.

Rovněž si připomeňme, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

Předpokládejme nejprve, že $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Pro libovolné dva body v \mathbb{R}^n : $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| &= \|\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} - (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{p})\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})\| = \sqrt{(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))^T (\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))} \\ &= \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \end{aligned}$$

a tedy f je shodné zobrazení.

(OPAČNÁ IMPLIKACE SE NEBUDE ZKOUŠET, JEN PRO ZAJÍMAVOST)

Naopak předpokládejme, že f je shodnost a chceme ukázat, že je nutně tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Definujme body $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ v \mathbb{R}^n . Vektory $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{O}$ tvoří ortonormální (kanonickou) bázi \mathbb{R}^n .

Ukážeme, že také vektory $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})$ tvoří ortonormální bázi \mathbb{R}^n . Zobrazení f je shodné, tedy pro každé i dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{O}\| = 1$$

a vektory jsou tedy jednotkové. Dále pro každé $i \neq j$ dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O}) - (f(\mathbf{E}_j) - f(\mathbf{O}))\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{E}_j)\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j\| = \sqrt{2}$$

a protože

$$2 = \|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\|^2 = (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 1 + 1 - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$$

dostáváme $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$ a vektory jsou po dvou kolmé.

Definujme nyní matici $\mathbf{A} = (\mathbf{f}_1 | \dots | \mathbf{f}_n)$, vektor $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a zobrazení $g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, které je podle první části důkazu shodné a pro jeho invers platí $g^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{A}^T\mathbf{p}$. Navíc zjevně platí $g(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O})$ a $g(\mathbf{E}_i) = f(\mathbf{E}_i)$ pro všechna i . Definujme konečně $h = g^{-1} \circ f$, které je shodné a pro které tedy platí $h(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ a $h(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$. Dokážeme, že takové h už musí být identické zobrazení.

Uvažujme libovolný bod $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a jeho obraz $h(\mathbf{Y}) = (h_1(\mathbf{Y}), h_2(\mathbf{Y}), \dots, h_n(\mathbf{Y}))$. Pak platí

$$\|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{O})\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + h_2^2(\mathbf{Y}) + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{O}\|^2,$$

$$\begin{aligned} \|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{E}_i)\|^2 &= \|h(\mathbf{Y}) - \mathbf{E}_i\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + \dots + (h_i(\mathbf{Y}) - 1)^2 + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) \\ &= y_1^2 + \dots + (y_i - 1)^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{E}_i\|^2. \end{aligned}$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $2h_i(\mathbf{Y}) - 1 = 2y_i - 1$, tedy pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $h_i(\mathbf{Y}) = y_i$, tedy h je identita a tedy $f(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$.

Poznamenejme, že v definici shodnosti se využívá pouze toho, že \mathbb{R}^n je metrický prostor. Tato věta ukazuje hlubokou souvislost s jeho strukturou lineárního prostoru. \square

Důsledek 5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Věta 6. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz. Plyne triviálně z blokového maticového násobení.

Definice 7. Zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je \mathbf{A} jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž \mathbb{R}^n . Zobrazení, pro která je \mathbf{p} nulový vektor tvoří ortonormální podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin).

Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané maticí \mathbf{A} nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f .

Věta 8. Každá přímá shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ je identita nebo posunutí nebo otočení.

Důkaz. Podle věty 1.4 je f tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$$

pro nějakou $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Samodružné body f jsou právě řešení soustavy $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ a samodružné směry f odpovídají vlastním vektorům \mathbf{A} . Jestliže je f , přímé, pak $\det(\mathbf{A}) = 1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dále rozlišujeme dva případy:

- $\alpha = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pro $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ jde o identitu – pak jsou všechny body samodružné. Pro $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ jde o posunutí, a to nemá žádné samodružné body (soustava $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ nemá řešení).
- $\alpha \neq 0$. Potom platí $\det(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 2(1 - \cos \alpha) \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení pro libovolné \mathbf{p} a tedy f má právě jeden samodružný bod \mathbf{S} . Lze psát

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{S},$$

takže jde o otočení kolem \mathbf{S} . Pro $\alpha = \pi$ je $\mathbf{A} = -\mathbf{I}_n$, tedy všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem -1 a jde o středovou souměrnost. V opačném případě \mathbf{A} nemá žádné vlastní vektory, tedy f nemá samodružné směry.

□

Věta 9. Složení dvou osových souměrností je otočení nebo posunutí (případně identita). Navíc každé otočení či posunutí lze jako složení dvou osových shodností vyjádřit.

Důkaz. Složení dvou souměrností je přímé zobrazení a podle Věty 8 jde o identitu, otočení nebo posunutí. Naopak mějme ...