7. cvičení z lineární algebry

Cíle cvičení:

- porozumět pojmům podprostor, lineární kombinace a lineární obal

Základní příklady:

1. Rozhodněte, zda je podprostorem reálného lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ množina vektorů:

$$\text{(a) } \{\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \text{ (b) } \{\begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\}. \text{ (c) } \{\begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$\text{(d) } \{\begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}, \text{ (e) } \mathbb{Q}^3, \text{ (f) } \{\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}, \text{ (g) } \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

2. Rozhodněte, zda jsou podprostorem

(a) řešení homogenní soustavy rovnic o n neznámých v prostoru T^n,
(b) řešení nehomogenní soustavy rovnic o n neznámých v prostoru T^n,
(c) čtvercové matice, které komutují s danou čtvercovou maticí $\mathbf{A}$, v lineárním prostoru všech čtvercových matic stejného stupně,
(d) reálné polynomy v reálném lineárním prostoru spojitých reálných funkcí,
(e) sudé funkce v reálném lineárním prostoru všech reálných funkcí.

3. Rozhodněte, zda množina X generuje lineární prostor $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, jestliže $X =$

$$\text{(a) } \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\}, \text{(b) } \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\}, \text{(c) } \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

4. Rozhodněte, zda je v lineárním prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ nad $\mathbb{Z}_7$ vektor $\mathbf{v}$ lineární kombinací vektorů množiny $X = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, jestliže $\mathbf{v} =$ (a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.
V případě, že ano, určete koeficienty této lineární kombinace.

5. Vyjádřete v lineárním prostoru $\mathbb{Q}^3$ vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ jako lineární kombinaci vektorů

$$\text{(a) } (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \text{ (b) } (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}), \text{ (c) } (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Obtížnější příklady:

6. Popište podmnožinu $\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \rangle \cap \langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \rangle$ lineárního prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

7. Nechť V je podprostor aritmetického vektorového prostoru T^n. Existuje soustava lineárních rovnic nad T, která má řešení právě všechny vektory z V? Nalezněte ji pro podprostory z úlohy 1.

Úlohy k zamyšlení:

8. Dokažte, že je množina reálných polynomů reálným lineárním prostorem, který neobsahuje žádnou konečnou generující množinu.

Řešení:

1. (a) ano, (b) ne, (c) ne, (d) ano, (e) ne, (f) ne, (g) ano.
2. (b) ne, ostatní ano.
3. (a) ne, (b) ne, (c) ano.
4. (a) ano, $\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}$, (b) ano $\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$, (c) ne, (d) ne.
5. (a) $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}-3\\-4\\3\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$.
6. $\langle \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} \rangle$.
7. Ano.