

6. cvičení z lineární algebry

Cíle cvičení:

- procvičit počítání s regulárními maticemi,
- procvičit hledání LU rozkladu.

Základní příklady:

1. Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ určete $\mathbf{A}^{-1}$, $(\mathbf{A}^T)^{-1}$ a $(\mathbf{A}^2)^{-1}$ nad tělesy $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Q}$.

2. Spočítejte nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_7$

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

3. Existuje-li, najděte LU rozklad reálných matic:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Upravte předchozí matice modulo 11 a spočítejte LU rozklad upravených matic na tělesem $\mathbb{Z}_{11}$.

5. Pro reálnou matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ověřte, že nemá LU-rozklad, najděte permutační matici $\mathbf{P}$ tak, aby matice $\mathbf{PA}$ měla LU rozklad a ten spočítejte.

Obtížnější příklady:

6. Pomocí LU rozkladu reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ spočítejte všechna řešení soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ pro vektor pravých stran $\mathbf{y} = (-3, 2, -1)^T$.

Úlohy k zamyšlení:

7. Najděte aspoň dvě čtvercové matice $\mathbf{A}$ nad tělesem T řádu n splňující podmínky $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n$ a $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}_n$, jestliže

a) $n = 2$ a $T = \mathbb{R}$, b) $n = 2$ a $T = \mathbb{Z}_5$, c) $n = 3$ a $T = \mathbb{R}$, d) $n = 4$ a $T = \mathbb{Z}_2$.

Řešení:

$$1. \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, (\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, (\mathbf{A}^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ nad}$$

$\mathbb{Q}$. Pro $\mathbb{Z}_5$, resp. $\mathbb{Z}_7$ stačí matice upravit modulo 5, resp. 7.

$$2. \text{ a) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \text{ a } \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7,$$

$$\text{ b) } \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -10 & 2 \\ -4 & 15 & -2 \end{pmatrix} \mathbb{R} \text{ a } \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Vše opět stačí upravit modulo 11

$$5. \text{ Např. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$