

3. cvičení z lineární algebry

Cíle cvičení:

- procvičit výpočet řešení soustavy lineárních rovnic Gaussovou eliminací,
- procvičit maticový zápis soustav lineárních rovnic.

Základní příklady:

1. Zapište soustavu do matice a najděte všechna její reálná řešení:

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & \begin{array}{l} 3x + 4y + 2z = 1 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{array} \end{array}$$

2. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic s maticí

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right), \quad \text{b)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right). \\ \text{c)} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad \text{d)} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right). \end{array}$$

3. Najděte všechna komplexní řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & 3 & 2-i & 3-i \\ i & 2-i & 1+i & 1-i \end{array} \right),$$

4. Najděte všechna řešení soustavy rovnic z úlohy 1. nad $\mathbb{Z}_5$:

Obtížnější příklady:

5. Rozhodněte pro, která $a \in \mathbb{R}$ existuje řešení soustavy rovnic s maticí

$$\text{a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right), \quad \text{b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a & 1 \\ a & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2a & a \end{array} \right).$$

Úlohy k zamyšlení:

6. Rozhodněte, které dvojice soustav mají stejnou množinu řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Řešení:

$$1. \text{ a) } \left\{ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}, \text{ b) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2. \text{ a) } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{d) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mid s_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4 \right\}.$$

$$3. \left\{ \begin{pmatrix} 1-2i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5-i \\ -i \\ 2+3i \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$4. \text{ a) } \emptyset, \text{ b) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

$$5. \text{ a) pouze pro } a = \frac{5}{3} \text{ b) pro } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 2\}$$

$$6. 1. \text{ a } 3.$$