11. série příkladů z lineární algebry

Cíle cvičení:

- Procvičit vlastnosti lineárních zobrazení a matic přechodu.

Základní příklady:

1. Najděte matici přechodu od báze A k bázi B a matici přechodu od báze B k bázi A, jestliže

(a) $A = (\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix})$, B je kanonická báze v aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^2$,

(b) $A = (\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix})$, $B = (\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix})$ v v aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^2$,

(c) $A = (1+i, 1+3i)$, $B = (1+2i, 2+3i)$ v lineárním prostoru $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$,

(d) $A = (\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix})$, $B = (\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix})$ v prostoru $\mathbb{Z}_7^3$.

2. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ s maticí $[f]_K^M = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 2 & 1\\4 & 0 & 3\end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $M = (\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix})$ a kanonické bázi K. Ověřte, že je f bijekce a najděte matice f a f^{-1} vzhledem ke kanonickým bázím.

3. Nechť $[g]_N^M = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\1 & 1 & 2 & 5\\1 & 2 & 6 & 6\end{pmatrix}$ je matice lineárního zobrazení $g : \mathbb{Z}_7^4 \to \mathbb{Z}_7^3$ vzhledem k bázím $M = ((1,1,0,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,0,1,1)^T, (1,0,0,0)^T)$ prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ a $N = ((3,1,4)^T, (3,3,0)^T, (2,1,6)^T)$ prostoru $\mathbb{Z}_7^3$. Určete bázi jádra $\operatorname{Ker} f$ a obrazu $\operatorname{Im} f$.

4. Určete dimenzi jádra $\operatorname{Ker} h$ a obrazu $\operatorname{Im} h$ lineárního zobrazení h nad tělesem T víte-li, že jeho matice vzhledem k (neznámým) bázím B a C je

(a) $[h]_C^B = \begin{pmatrix}6 & 4 & 7\\1 & 8 & 3\end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{Z}_{11}$

(b) $[h]_C^B = \begin{pmatrix}6 & 4 & 7\\1 & 8 & 3\end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{R}$

(c) $[h]_C^B = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\2 & -1 & 1\\1 & -3 & 1\end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{Q}$

(d) $[h]_C^B = \begin{pmatrix}2+i & 1-i & 7+3i & -1 & 6-7i\\7-i & 3 & 4-i & 0 & 2i\end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{C}$

Obtížnější příklady:

5. Najděte všechna $a, b \in \mathbb{Q}$, pro která existuje lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ splňující
$\varphi(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$, $\varphi(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$, $\varphi(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2b\end{pmatrix}$.

Úlohy k zamyšlení:

6. Nechť $k \le n$, V je lineární prostor V nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ dimenze n a U jeho podprostor dimenze k. Kolik existuje takových lineárních zobrazení $\varphi : V \to U$, že $U \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$?

Řešení:

1. (a) $[\mathrm{Id}]^A_B = \begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 8\end{pmatrix}$, $[\mathrm{Id}]^B_A B = \begin{pmatrix}8 & -3\\-5 & 2\end{pmatrix}$,

   (b) i (c) $[\mathrm{Id}]^A_B = \begin{pmatrix}-1 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}$, $[\mathrm{Id}]^B_A B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}$,

   (d) $[\mathrm{Id}]^A_B = \begin{pmatrix}2 & 6 & 3\\1 & 1 & 0\\0 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $[\mathrm{Id}]^B_A B = \begin{pmatrix}4 & 0 & 6\\3 & 1 & 1\\1 & 5 & 1\end{pmatrix}$.
2. $[f]^K_K = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 0\\1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $[f^{-1}]^K_K = \begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\0 & 4 & 1\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}$.
3. Báze $\operatorname{Ker} f$ je například $((2,5,4,2)^T, (3,6,0,1)^T)$ a báze $\operatorname{Im} f$ je například $((6,5,6)^T, (5,2,3)^T)$.
4. (a) $2, 1$, (b) $1, 2$, (c) $1, 2$, (d) $3, 2$.
5. $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \rangle$.
6. $2^{k(n-k)}$.