10. série příkladů z lineární algebry

Cíle cvičení:

- naučit se efektivně počítat dimenze průniků a spojení podprostorů,
- procvičit pojem lineární zobrazení a matice lineárního zobrazení.

Základní příklady:

1. Spočítejte dimenze podprostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}+\mathbf{V}$, $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$, jestliže.

(a) $\mathbf{U} = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \rangle$ a $\mathbf{V} = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, (\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \rangle$ v prostoru $\mathbb{Q}^3$

(b) $\mathbf{U} = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} \rangle$ a $\mathbf{V} = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix} \rangle$ v prostoru $\mathbb{Z}_3^4$.

2. Najděte bázi prostorů $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$ z předchozí úlohy.

3. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ dané předpisem $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}$. Ověřte, že je f lineární zobrazení a najděte jeho matici vzhledem

(a) ke kanonickým bázím K_3 a K_2,

(b) k bázi $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$ a K_2,

(c) k bázi B a $C = (\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$,

4. Nechť $g : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^3$ je zobrazení určené předpisem $g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+3x_2\\4x_1\\2x_1+6x_2\end{pmatrix}$. Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení a najděte jeho matici vzhledem ke kanonickým bázím a vzhledem k bázím $A = (\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix})$ a $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\0\\5\end{pmatrix})$.

5. Buď $A = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})$ báze prostoru $\mathbb{Z}_3^3$ a $B = (\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$ báze prostoru $\mathbb{Z}_3^2$. Najděte maticí lineárního zobrazení $\psi : \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^2$ vzhledem ke kanonickým bázím, má-li vzhledem k bázím A a B matici $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Obtížnější příklady:

6. Je-li $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení splňující $\varphi(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\varphi(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ ověřte, že jde o bijekci a najděte vzhledem ke kanonickým bázím matice φ, φ^{-1} a φ^2.

Úlohy k zamyšlení:

7. Označme $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, \deg < 4\}$ podprostor lineárního prostoru reálných polynomů a definujme zobrazení $\Omega : V \to \mathbb{R}^4$ předpisem $\Omega(p) = \begin{pmatrix}p(0)\\p(1)\\p(2)\\p(3)\end{pmatrix}$. Ověřte, že je Ω lineární, najděte jeho matici vzhledem k bázím (x^0, x^1, x^2, x^3) a $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ a rozhodněte, zda jde o bijekci.

Řešení:

1. (a) 2,2,3,1, (b) 3,3,4,2.
2. (a) např. kanonická báze a $(\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix})$ (b) např. kanonická báze a $(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix})$
3. (a) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 0\\2 & 6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4 & 5\\0 & 0\\5 & 6\end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4 & 8\\1 & 3 & 9 & 27\end{pmatrix}$, ano.