1. a 2. cvičení z lineární algebry

Cíle cvičení:

- zopakovat středoškolské metody řešení soustav lineárních rovnic v $\mathbb{R}$
- posílit geometrickou představu jako hledání průniku nadrovin
- při zápisu řešení s parametrem začít přecházet ke tvaru sloupcových vektorů s vytknutým parametrem
- procvičit počítání s komplexními čísly
- naučit se počítat v $\mathbb{Z}_p$
- ujasnit si, že lineární rovnice a soustavy lze řešit v $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{Z}_p$

Základní příklady:

1. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ dvě přímky s obecným vyjádřením:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + 3y = 5\}, T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x - y = -4\}$$

(a) Určete parametrické vyjádření přímek S a T,
(b) najděte průsečík přímek $S \cap T$,
(c) popište všechny racionální body $S \cap \mathbb{Q}^2$ a $T \cap \mathbb{Q}^2$.

2. Mějme v $\mathbb{R}^3$ tři roviny s obecným vyjádřením: $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x + y - z = 1\}$, $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + y + 2z = 3\}$, $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 3x + -3y + 2z = 5\}$.

(a) Určete nějaká parametrické vyjádření těchto rovin,
(b) najděte parametrický popis průsečíků $R_i \cap R_j$ pro $i \neq j$ a průsečík $R_1 \cap R_2 \cap R_3$,
(c) popište všechny body $R_1 \cap R_2 \cap \mathbb{Q}^3$.

3. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 6 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1, \\ 3x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & 2z & = & 2, \\ x & + & 2y & + & 7z & = & 4 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & 2z & = & 2. \\ x & + & 2y & + & 7z & = & 5 \end{array}$$

4. Spočítejte v komplexním oboru:

(a) hodnotu výrazů $c + d$, $c \cdot d$, $\frac{1}{c}$, $\frac{c}{d}$, c^{11} pro komplexní čísla $c = 1 + i$, $d = 2 - i$,
(b) rovnici $1 + 2i + (2 + 3i)x = 4 - i$,

(c) soustavu rovnic $\begin{array}{ccccc} ix & + & (1+i)y & = & 2+i \\ (2-i)x & + & 3y & = & 5-4i. \end{array}$

Pro přirozené p označme $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ a na $\mathbb{Z}_p$ zaveďme operaci

$$a + b = (a+b) \mathrm{mod}\ p\ , \quad a \cdot b = (a \cdot b) \mathrm{mod}\ p,$$

kde v závorce uvažujeme obvyklé operace na celých číslech a mod p znamená zbytek po celočíselném dělení číslem p.

5. Určete tabulky operací $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$ a ukažte, že zde pro každé nenulové a existuje b, pro něž $a \cdot b = 1$.

6. Řešte pro různá konkrétní a, b, c rovnice typu $ax + b = c$ v $\mathbb{Z}_p$, kde $p = 2, 3, 5$.

7. Najděte v oboru $\mathbb{Z}_2$ řešení soustavy rovnic: $\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array}$

8. Najděte v oboru $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$ řešení soustav rovnic: $\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 1 \\ y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & z & = & 1 \end{array}$

Obtížnější příklady:

9. Najděte v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & 3z & = & a \\ x & - & ay & + & z & = & 2 \end{array}$$

10. Najděte v $\mathbb{Z}_5$:

(a) všechna x a y splňující rovnici $4x + 3y + 1 = 2$,
(b) všechna x, y a z splňující rovnici $x + y + z = 0$.

11. Najděte všechna řešení soustavy rovnic nad obory $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_4 & = & 1 \\ x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Úlohy k zamyšlení:

12. Řešte $ax + by = c$ v $\mathbb{Z}_p$ pro $p = 2, 3, 5$. Kolik má rovnice řešení?

13. Řešte $ax + by + cz = d$ v $\mathbb{Z}_p$ pro $p = 2, 3, 5$. Kolik má rovnice řešení?