NALG 001 Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr
MFF UK
Závěrečná zkouška — verze cvičná
9.1.2013
Doba řešení: 3 hodiny

Přednášející: L. Barto, J. Tůma

Křestní jméno: Josef **Příjmení:** Švejk

Instrukce

– **Neotvírejte dříve než jste k tomu vyzváni dozorem!**

– Test je vytištěn oboustranně. Obsahuje 7 příkladů na stranách 2 až 14, strany 15 až 18 jsou volné na pomocné výpočty, apod. Jste odpovědný za to, že kopie zkoušky je úplná.

– Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněné, není-li řečeno jinak.

– Žádné elektronické pomůcky včetně kalkulačky nejsou dovoleny.

Příklad	Body
1 [8]	
2 [8]	
3 [12]	
4 [12]	
5 [12]	
6 [20]	
7 [8]	
DU [20]	
Celkem [100]	
Známka	

(1) [8 bodů] Zakroužkujte správnou odpověď, nezdůvodňujte. K získání bodů je potřeba vždy odpovědět správně všechny tři otázky.

(a) Mějme matici A nad $\mathbb{R}$ typu $m \times n$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{T}^m$.

- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je vždy podprostorem $\mathbf{T}^n$.
- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ je vždy podprostorem $\mathbf{T}^n$.
- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ je vždy podprostorem $\mathbf{T}^m$.

(b)

- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Existuje lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, které je na.
- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Existuje lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, které je prosté.
- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Lineární zobrazení f je prosté právě tehdy, když jádro f obsahuje pouze nulový vektor.

(c) Mějme matici A nad $\mathbb{R}$ typu $m \times n$ v odstupňovaném tvaru.

- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Bázové sloupce matice A jsou vždy lineárně nezávislé.
- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Počet bázových sloupců matice A je roven počtu nenulových řádků matice A.
- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Počet bázových sloupců matice A je roven hodnosti matice A.

(d) Mějme čtvercové matice A, B, C stejného řádu nad stejným tělesem.

- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Vždy platí $A(BC) = (AB)C$.
- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Vždy platí $AB = BA$.
- **PRAVDA** **NEPRAVDA** Vždy platí $A(B + C) = AB + AC$.

(2) [8 bodů] Uveďte definici následujících pojmů. Pište pečlivě, celými větami, nikoliv schematicky.

(a) Matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím.

Nechť f je lineární zobrazení z vektorového prostoru $\underline{V}$ do vektorového prostoru $\underline{W}$, $B = (\vec{v_1}, .., \vec{v_n})$ je báze $\underline{V}$ a C je báze $\underline{W}$.

Matice f vzhledem k B a C je matice

$$\left([f(\vec{v_1})]_C \;\middle|\; .... \;\middle|\; [f(\vec{v_n})]_C \right).$$

(b) Direktní součet (stačí pro dva podprostory).

Vektorový prostor $\underline{V}$ je direktním součtem svých podprostorů $\underline{W_1}$ a $\underline{W_2}$, pokud $V = W_1 + W_2$ a $W_1 \cap W_2 = \{\vec{o}\}$.

(c) Homogenní soustava lineárních rovnic.

Soustavu lineárních rovnic $A\vec{x}=\vec{b}$ ~~Ax~~ nazýváme homogenní, pokud $\vec{b} = \vec{o}$.

(3) [12 bodů] V tomto příkladu nemusíte zdůvodňovat řešení. K plnému počtu bodů stačí správný výsledek.

(a) Napište permutaci $\pi \in S_7$ jako složení transpozic. Permutace π je zadaná tabulkou

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\pi = (1\ 4)(1\ 7)(1\ 3)(2\ 5)(2\ 6)$

(b) Pro soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

určete, které proměnné jsou bázové a které volné (=parametry). (Soustavu neřešte!)

bázové ... x_2, x_4, x_5

volné .. x_1, x_3, x_6

(c) Spočítejte matici homomorfismu $fg : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2$ vzhledem ke kanonickým bázím, víte-li

$$[f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [g]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) V prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1 x_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

spočítejte normu vektoru $(2,1)^T$.

$2\sqrt{5}$

(e) Jaká je charakteristika těles $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}_{37}$?

$\mathrm{char}\ \mathbb{Q} = 0$

$\mathrm{char}\ \mathbb{Z}_{37} = 37$

(f) Určete souřadnice vektoru $(1,2)^T \in \mathbb{Z}_3^2$ vzhledem k bázi $B = ((1,1)^T, (1,0)^T)$.

$$[(1,2)^T]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(4) [12 bodů]

(a) Zjistěte, zda vektor $(1,3,2,4)^T$ leží v $\operatorname{Im} A$, kde A je reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

chceme zjistit, zda ~~∄~~ existuje $\vec{x}$ takový, že $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,
tj. zda následující soustava je řešitelná

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \leftarrow$$ soustava nemá řešení, tj. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ v prostoru $\operatorname{Im} A$ **neleží**

(b) V prostoru $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální projekci vektoru $(1, i, 1+i)^T$ na rovinu $\langle (1,1,i)^T, (1,2,0)^T \rangle$.

Projekce vektoru $\vec{v} = (1, i, 1+i)$ na rovinu $W = \langle \vec{w_1}, \vec{w_2} \rangle = \langle (1,1,i)^T, (1,2,0)^T \rangle$ je podle tvrzení z přednášky rovna $\vec{v} = a_1\vec{w_1} + a_2\vec{w_2}$, kde $(a_1, a_2)^T$ je řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 & w_1 \cdot v \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 & w_2 \cdot v \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1+2i \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1+2i \end{array}\right)$$ zpětnou substitucí $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} - i \\ -\frac{1}{2} + i \end{pmatrix}$, tj.

$$\vec{v}_W = \left(\tfrac{7}{6} - i\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{1}{2} + i\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} + i \\ 1 + \frac{7}{6} i \end{pmatrix}}}$$

(c) Vyjádřete matici A nad $\mathbb{Z}_3$ jako součin elementárních matic.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

řádkovými elementárními úpravami upravíme $(A \mid I_3) \sim \dots (I_3 \mid A^{-1})$ a budeme sledovat úpravy, tj.

$$(A \mid I_3) \sim (E_1 A \mid E_1) \sim (E_2 E_1 A \mid E_2 E_1) \sim \dots$$

$$\dots \sim (\underbrace{E_k \cdots E_1 A = I_3}_{\text{pak z}} \mid E_k \cdots E_1)$$

vidíme $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{E_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{E_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{E_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

matice úprav byly

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tj. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) [12 bodů]

(a) Zformulujte a dokažte tvrzení o jednoznačnosti opačných prvků a nulového prvku v tělese.

Nechť T je těleso a $x \in T$. Pak

(1) jsou-li $0, 0' \in T$ takové, že $0 + y = \cancel{y+0} = 0' + y = y$ pro každé $y \in T$, pak $0 = 0'$

(2) jsou-li $y, y' \in T$ takové, že $x + y = x + y' = 0$, pak $y = y'$

Důkaz:

(1) platí $0 = 0 + 0' = 0'$

protože $0' + 0 = 0$ a z komutativity $0' + 0 = 0 + 0'$

předpoklad

(2)

$$x + y = x + y' \quad / +(-x) \text{ zleva}$$

$$(-x) + (x + y) = (-x) + (x + y') \quad / \text{asoc}$$

$$((-x) + x) + y = ((-x) + x) + y' \quad / \text{axiom opačného prvku}$$

$$0 + y = 0 + y' \quad / \text{axiom nulového prvku}$$

$$y = y'$$

(b) Zformulujte a dokažte tvrzení o dimenzi podprostoru konečně generovaného prostoru (tj. že dimenze je menší nebo rovná a kdy nastává rovnost).

Nechť $\underline{V}$ je konečně generovaný vektorový prostor a $\underline{W}$ jeho podprostor. Pak $\underline{W}$ je konečně generovaný a platí $\dim \underline{W} \leq \dim \underline{V}$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když platí $W = V$.

Důkaz:

- $\underline{W}$ je konečně generovaný:

  w_1 ... libovolný nenulový vektor ve W (pokud neexistuje je $W = \{\vec{o}\}$ a tvrzení je zřejmé)

  - pokud $\langle w_1 \rangle = W$ jsme hotovi
    jinak w_2 .. libovolný nenulový vektor z $W \setminus \langle w_1 \rangle$
  - pokud $\langle w_1, w_2 \rangle = W$ jsme hotovi
    jinak $w_3 \in W \setminus \langle w_1, w_2 \rangle$
  - atd.

  $w_1, w_2, \ldots, w_{\dim V + 1}$ je LN ve W, tedy i ve V, což je nemožné (protože LN posloupnost jde doplnit ve V na bázi, ale každá báze V má $\dim V$ prvků)

- pak $\underline{W}$ má bázi B ta je LN ve V, takže jde doplnit na bázi V. Tedy $\dim W \leq \dim V$
- pokud $\dim \underline{W} = \dim \underline{V}$, pak již B je báze V (ze stejného důvodu), tedy $W = V$
- pokud $W = V$ pak $\dim \underline{W} = \dim \underline{V}$ zřejmě

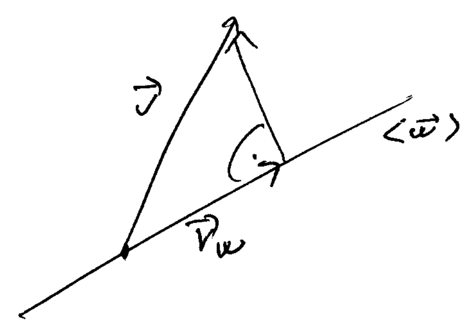
(c) Zformulujte a dokažte tvrzení o ortogonální projekci vektoru na přímku.

V libovolném konečně generovaném vektorovém prostoru $\underline{V}$ se skalárním součinem $\langle\ |\ \rangle$ je ortogonální projekcí vektoru $\vec{v}$ na přímku $W = \langle\vec{w}\rangle$, $\vec{w} \neq \vec{o}$, vektor

$$\vec{v}_w = \frac{\langle\vec{w}\,|\,\vec{v}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}\,\vec{w}$$

Důkaz:

chceme, aby $\vec{v} - \vec{v}_w \perp \langle\vec{w}\rangle$



k tomu je nutné a stačí

$$\vec{v} - \vec{v}_w \perp \vec{w}$$

$$\langle\vec{w}\,|\,\vec{v} - \vec{v}_w\rangle = 0$$

vektor $\vec{v}_w$ hledáme tvaru $a \cdot \vec{w}$, tj.

$$\langle\vec{w}\,|\,\vec{v} - a\vec{w}\rangle = 0$$

$$\langle\vec{w}\,|\,\vec{v}\rangle - a\langle\vec{w}\,|\,\vec{w}\rangle = 0$$

$$a = \frac{\langle\vec{w}\,|\,\vec{v}\rangle}{\langle\vec{w}\,|\,\vec{w}\rangle}$$

tj. $\underline{\vec{v}_w} = a \cdot \vec{w} = \underline{\frac{\langle\vec{w}\,|\,\vec{v}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}\,\vec{w}}$

(6) [20 bodů]

(a) Čtvercová matice C se nazývá symetrická, pokud $C^T = C$. Předpokládejme, že A, B jsou čtvercové matice stejného řádu nad stejným tělesem. Zjistěte, které z následujících matic jsou vždy symetrické (tj. dokažte, že je matice vždy symetrická, nebo uveďte protipříklad).

$$(i) B^T AB \quad (ii) B^T(A^T + A)B \quad (iii) 2A^T + 2A$$

(i) ne vždy, např. $B = I_2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^TAB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← nesymetrická

(ii) vždy sym.

$$(B^T(A^T + A)B)^T = B^T(A^T+A)^T(B^T)^T = B^T((A^T)^T + A^T)B =$$

- X^T a násobení
- X^T a sčítání
- $X^{T^T} = X$

$$= B^T(A + A^T)B = B^T(A^T + A)B$$

+ je komutativní

(iii) vždy sym. $(2A^T + 2A)^T = (2A^T)^T + (2A)^T = 2(A^T)^T + 2A^T$

$$= 2A + 2A^T = 2A^T + 2A$$

(b) Najděte co nejjednodušší vyjádření pro $\det(\mathbf{v}\mathbf{v}^T)$, kde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

pokud $n=1$, tj. $\vec{v} = (x)$ pak $\boxed{\det(vv^T) = x^2}$

jinak $\operatorname{rank}(\vec{v}\vec{v}^T) \leq 1$ protože každý sloupec je násobkem vektoru $\vec{v}$ (podle tvrzení o násobení jako LK sloupců), tj. sloupcový prostor je generován $\vec{v}$,

tj. $\operatorname{rank}(\vec{v}\vec{v}^T) = \dim \operatorname{Im} \vec{v}\vec{v}^T = \dim \langle \vec{v} \rangle \leq 1$

Matice je řádu $n > 1$, takže je singulární, tedy

$\boxed{\det(\vec{v}\vec{v}^T) = 0}$, (podle věty o determinantu a regulárnosti)

(c) Existuje reálná matice A taková, že lineární obal řádků A je

$$\langle (1,2,3,4,5)^T, (4,4,0,-1,3)^T, (5,1,2,3,7)^T \rangle$$

a jádro A je $\langle (\pi,1,2,0,3)^T, (3,1,0,2,3)^T \rangle$?

víme, že každý vektor v $\mathrm{Im}\, A^T$ je kolmý na každý vektor v $\mathrm{Ker}\, A$

Zde to neplatí, protože např. $(3\,1\,0\,2\,3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} \neq 0$.

Tzn. takové matice neexistuje.

(d) Pro každé přirozené číslo n najděte vektorový prostor V a vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_7 \in V$ takové, že posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_7)$ je lineárně závislá, ale každá 6-člená podposloupnost je lineárně nezávislá.

zvolíme $V = \mathbb{R}^6$, bázi $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_6)$ a $\vec{v}_7 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_6$

$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_7)$ je LZ, protože LN množina v prostoru dimenze 6 má nejvíc 6 vektorů

$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_6)$ LN protože je to báze

pro každé $i \in \{1, \ldots, 6\}$ je $B = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots \vec{v}_6, \vec{v}_7)$ ~~báze~~ LN

protože $\vec{v}_i$ je v LO těchto vektorů

$\vec{v}_i = \vec{v}_7 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \ldots \vec{v}_{i-1} - \vec{v}_{i+1} - \ldots \vec{v}_7$

tj. LO těchto vektorů $=$ LO $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_6 = \mathbb{R}^6$, čili B je dokonce báze.

Konkrétně např.
$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\end{pmatrix}, \ldots, \vec{v}_6 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_7 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

(e) V prostoru V nad komplexními čísly se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ je dána ortogonální báze $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a vektor $\mathbf{w}$. Dále víme $\|\mathbf{u}\| = 3$, $\|\mathbf{v}\| = 5$, $\langle \mathbf{w} \,|\, \mathbf{u}\rangle = 1 + i$ a $\langle \mathbf{w} \,|\, \mathbf{v}\rangle = 2 - 3i$. Určete souřadnice vektoru $\mathbf{w}$ vzhledem k bázi B.

značme $[\vec{w}]_B = (a, b)^T$

máme $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

z toho

- $\langle \vec{w} | \vec{u} \rangle = \langle a\vec{u} + b\vec{v} | \vec{u} \rangle$

$$1 + i = \bar{a}\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle + \bar{b}\underbrace{\langle \vec{v} | \vec{u} \rangle}_{=0}$$

$$1 + i = \bar{a} \cdot 9$$

$$a = \frac{\overline{1+i}}{9} = \frac{1-i}{9}$$

- $\langle \vec{w} | \vec{v} \rangle = \langle a\vec{u} + b\vec{v} | \vec{v} \rangle$

$$2 - 3i = \bar{a}\underbrace{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}_{=0} + \bar{b}\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$$

$$2 - 3i = \bar{b} \cdot 25$$

$$b = \frac{\overline{2-3i}}{25} = \frac{2+3i}{25}$$

tj. $$[\vec{w}]_B = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{9} \\ \frac{2+3i}{25} \end{pmatrix}$$

(7) [8 bodů] Zformulujte a dokažte větu o rozvoji determinantu podle sloupce.

Pro libovolnou čtvercovou matici A řádu n a libovolné $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + \ldots + a_{nj} A_{nj},$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici $A = (a_{ij})$.

Důkaz: např. viz skripta

toto ve zkouškové písemce samozřejmě nebude oceněno body