Domácí úkol č. 10 k přednášce NMAG 101: Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr 2015–2016

(10.1) O lineárním zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ máme následující informace:

$$f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \quad \text{a} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Určete f-obraz vektoru $(x, y)^T$.

(10.2) Víme, že K, L, M jsou báze prostoru $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a platí

$$[\mathbf{x}]_L = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad [f]^K_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad [f]^K_M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi M (v závislosti na a, b).

(10.3) Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem ke kanonickým bazím je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte bázi B prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ takovou, že matice f vzhledem k B a B je tvaru

$$[f]^B_B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

pro nějaké $c \in \mathbb{Z}_5^2$.

Bonusový problém: Existuje zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ splňuje $f(x + y) = f(x) + f(y)$, jiné než zobrazení tvaru $f(x) = kx$ (pro $k \in \mathbb{R}$)? Existuje takové spojité zobrazení?