

Geometrické modelování, ZS 2022-23

Toto je seznam vět a definic, které budou u zkoušky vyžadovány formálně přesně. Týká se to i důkazů, pokud jsou zde uvedeny. Kapitola 1 je zde jen pro úplnost, nebude zkoušena teoreticky. Vyžaduje se však, aby studenti znali definice a byli schopni s nimi prakticky pracovat (výpočet znaménkové křivosti, oskulační kružnice, reparametrizace atd.) Ostatní látka z prezentací bude zkoušena orientačně. Zkouška bude individuální a bude založena především na diskusi nad implementacemi. Přitom se ale ověřuje studentovo pochopení látky. Student rovněž vyřeší několik úloh na papír, mohou vypadat například takto:

1. Formulujte a dokažte větu chybě Lagrangeovy interpolace polynomem stupně 1.
2. Pomocí DeCastelja algoritmu vypočítejte bod $c(1/2)$ pro Bézierovu křivku s řídicími body $P_0 = [1, 2]$, $P_1 = [0, -1]$, $P_2 = [-1, 1]$. V tomto bodě určete tečnou přímkou, znaménkovou křivost a oskulační kružnici.
3. Dokažte vzorec pro derivaci Bézierovy křivky.

1 Křivky v rovině a jejich transformace

Definice 1.1 Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy C^∞) $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ se nazývá *parametrizovaná křivka* v \mathbb{R}^2 . Množina $\langle c \rangle := c(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrizovaná křivka se nazývá *regulární*, jestliže $c'(t) \neq (0, 0)^T$ pro každé $t \in I$.

Poznámka 1.2 Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na I restrikcí na I diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu. Parametrizovaná křivka je charakterizována dvojicí funkcí definovaných na I , tedy $c(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$. Často není třeba a pro praxi není vhodné, aby c a ϕ bylo třídy C^∞ , ale podle situace postačí nižší hladkost, například C^1 , C^2 , C^3 .

Definice 1.3 Je-li $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka a $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ difeomorfismus intervalu \tilde{I} na I , je $\tilde{c} = c \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako c . Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a \tilde{c} *reparametrizací* c . Je-li navíc $\phi' > 0$ na \tilde{I} , nazveme \tilde{c} reparametrizací c *zachovávající orientaci*.

Definice (a lemma) 1.4 Býti reparametrizací je relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *křivka*. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme *parametrizací* této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *orientovaná křivka*.

Důkaz: Difeomorfismus je zobrazení $\Phi : \tilde{I} \rightarrow I$ které je bijekce, hladké C^∞ a $\Phi' \neq 0$ všude. Z toho plyne, že Φ^{-1} je také difeomorfismus.

- **Tranzitivita:** složení difeomorfismů je difeomorfismus, tedy $(\tilde{c} = c \circ \Phi$ a $\tilde{\tilde{c}} = \tilde{c} \circ \psi)$
 $\Rightarrow \tilde{\tilde{c}} = c \circ (\Phi \circ \psi)$
- **Symetrie:** inverze difeomorfismu je difeomorfismus, tedy když $\tilde{c} = c \circ \Phi \Rightarrow c = \tilde{c} \circ \Phi^{-1}$
- **Reflexivita:** identita je difeomorfismus a tedy $c = c \circ id$
- **Orientace:** složení rostoucích funkcí je rostoucí a inverze k rostoucí funkci je rostoucí, tedy $(id' > 0)$; $(\Phi' > 0) \Rightarrow (\Phi^{-1})' > 0$; $(\Phi' > 0 \ \& \ \psi' > 0) \Rightarrow (\Phi \circ \psi)' > 0$.

□

Poznámka 1.5 Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem *křivka* (případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz. V diferenciální geometrii studujeme takové vlastnosti křivek, které se nemění při reparametrizaci.

Poznámka 1.6 Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrizovanou křivku $c(t)$ budeme její reparametrizaci $\tilde{c}(s) = c(\phi(s))$ označovat jednoduše $c(s)$. Dále budeme psát například $t(s)$ namísto $t = \phi(s)$ a v důsledku i $s(t)$ namísto $s = \phi^{-1}(t)$. Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například c' místo $c'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a tečka derivaci $\frac{d}{ds}$.

Lemma 1.7 Pro derivace dvou parametrizací $c(t)$ a $c(s) = c(t(s))$ téže křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$\begin{pmatrix} \dot{c} \\ \ddot{c} \\ \ddot{\tilde{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{t} & 0 & 0 \\ \ddot{t} & \dot{t}^2 & 0 \\ \ddot{\tilde{t}} & 3\dot{t}\ddot{t} & \dot{t}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ c'' \\ c''' \end{pmatrix}.$$

Důkaz: Přímý výpočet derivace složené funkce,

1.

$$\dot{c} = \frac{d}{ds} c(t(s)) = \frac{d}{dt} c(t) \frac{dt}{ds} = \dot{t} c'.$$

2.

$$\begin{aligned} \ddot{c} &= \dot{t} c' \quad \Big| \quad \frac{d}{ds} \\ \ddot{\tilde{c}} &= \ddot{t} \cdot c' + \dot{t} \cdot \dot{t} \cdot c'' = \ddot{t} \cdot c' + (\dot{t})^2 \cdot c'' \end{aligned}$$

3.

$$\ddot{\tilde{\tilde{c}}} = \ddot{\tilde{t}} \cdot c' + \dot{\tilde{t}} \cdot \dot{\tilde{t}} \cdot c'' + 2\dot{\tilde{t}} \cdot \ddot{\tilde{t}} \cdot c'' + (\dot{\tilde{t}})^2 \cdot \dot{\tilde{t}} \cdot c''' = \ddot{\tilde{t}} \cdot c' + 3\dot{\tilde{t}} \cdot \ddot{\tilde{t}} \cdot c'' + (\dot{\tilde{t}})^3 \cdot c'''$$

□

Definice (a lemma) 1.8 Délku křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t)$, $t \in I = (\alpha, \beta)$ definujeme jako určitý integrál

$$\int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{c}'(t)\| dt,$$

který nezávisí na parametrizaci.

Důkaz: Pro případ rostoucí reparametrizační funkce $t(s)$ zobrazující interval $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ na interval $[\alpha, \beta]$ platí, že $\dot{t} > 0$ a podle věty o substituci

$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{t}\mathbf{c}'(t)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \dot{t} \|\mathbf{c}'(t)\| ds = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Pro případ klesající $t(s)$ dostaneme, že se interval $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ zobrazí na $[\beta, \alpha]$, a že $\dot{t} < 0$, tedy

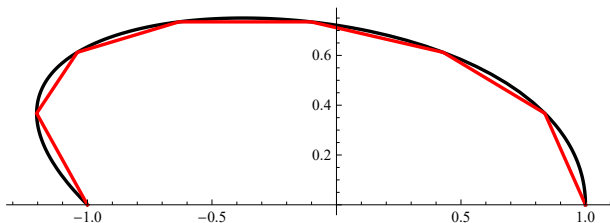
$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{t}\mathbf{c}'(t)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} -\dot{t} \|\mathbf{c}'(t)\| ds = - \int_{\beta}^{\alpha} \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

□

Definice 1.9 Vepsaná lomená čára je definována jako spojnice uspořádaných bodů

$$\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1), \dots, \mathbf{c}(t_m),$$

kde $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$.



Věta 1.10 Délka křivky je supremem délek všech vepsaných lomených čar, tedy

$$L(\mathbf{c}) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|, \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta \right\}.$$

Při rozdělení rovnoměrné v parametru

$$t_i = \alpha + \frac{i}{m}(\beta - \alpha) = \left(1 - \frac{i}{m}\right) \alpha + \frac{i}{m} \beta$$

délka lomené čáry L_m k délce křivky L konvergue pro $m \rightarrow \infty$ jako $\mathcal{O}(\frac{1}{m^2})$, tedy existuje konstanta $K > 0$ taková, že pro každé m platí

$$(L - L_m) < \frac{K}{m^2}.$$

Definice (a lemma) 1.11 V každém bodě orientované křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t)$ definujeme její rychlosti budeme označovat $r(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|$. *jednotkový tečný vektor* výrazem

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}.$$

Dále definujeme normálový vektor $\mathbf{n}_*(t)$ tak, aby $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_*(t)\}$ byla kladně orientovaná ortonormální báze \mathbb{R}^2 . Tyto vektory se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné vektory.

Důkaz: Derivováním dostáváme

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(s)}{\|\dot{\mathbf{c}}(s)\|} = \frac{\dot{\mathbf{c}}'(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}'(t)\|} = \frac{\dot{t}}{|\dot{t}|} \cdot \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \text{sign}(\dot{t}) \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \text{sign}(\dot{t})\mathbf{t}(t).$$

Navíc platí

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t) \Rightarrow \mathbf{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \text{sign}(\dot{t}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t) = \text{sign}(\dot{t})\mathbf{n}_*(t)$$

□

Definice (a lemma) 1.12 Pro regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definujeme v každém bodě *znaménkovou křivost*

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Znaménková křivost se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci mění znaménková křivost pouze znaménko. Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme *inflexní*.

Důkaz:

$$\frac{\det(\dot{\mathbf{c}}(s), \ddot{\mathbf{c}}(s))}{\|\dot{\mathbf{c}}(s)\|^3} = \frac{\det \left[\begin{pmatrix} \dot{t} & 0 \\ \ddot{t} & \dot{t}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}'(t) \\ \mathbf{c}''(t) \end{pmatrix} \right]}{\|\dot{\mathbf{c}}'(t)\|^3} = \frac{\dot{t}^3}{|\dot{t}|^3} \cdot \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3} = \text{sign}(\dot{t}) \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

□

Definice 1.13 Pro každou křivku \mathbf{c} definujeme v každém bodě její *tečnou přímkou* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme její *orientovaný poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + R(t)\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Věta 1.14 Ve svém každém neinflexním bodě má křivka ze všech přímek kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou a ze všech kružnic má kontakt nejvyššího řádu s oskulační kružnicí.

Věta 1.15 *Znaménkovou křivost lze přibližně vypočítat z vepsané lomené čáry. Definujme $\vec{\mathbf{v}}_i = \mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})$ a pak lze například přibližně počítat*

$$\kappa_z(t_i) \approx \arcsin \left(\frac{\det\{\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_{i+1}\}}{\|\vec{\mathbf{v}}_i\| \|\vec{\mathbf{v}}_{i+1}\|} \right) \frac{2}{\|\vec{\mathbf{v}}_i\| + \|\vec{\mathbf{v}}_{i+1}\|}.$$

2 Beziérový křivky

Definice 2.1 i -tý Bernsteinův polynom stupně n definujeme jako

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}.$$

Věta 2.2 Následující vlastnosti platí pro každou volbu indexů. Jestliže je $i < 0$ nebo $i > n$, pak klademe $B_i^n(t) = 0$.

1. $B_i^n(t)$ je nezáporný na $[0, 1]$ a pro $n > 0$ má na tomto intervalu jediné maximum v bodě $t = i/n$.
2. Pro každé n je $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$.
3. Symetrie $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$.
4. Rekurence

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$

5. Derivace

$$B_i^n(t)' = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).$$

6. Vnoření prostorů $\mathcal{P}_n[t] < \mathcal{P}_{n+1}[t]$ je realizováno vztahem

$$B_i^n(t) = \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t).$$

Důkaz:

1. $B_i^n(t)' = \binom{n}{i} [it^{i-1}(1-t)^{(n-i)} - (n-i)t^i(1-t)^{(n-i-1)}] = \binom{n}{i} t^{i-1}(1-t)^{n-i-1} [i(1-t) - (n-i)t] = \underbrace{\binom{n}{i} t^{i-1}(1-t)^{n-i-1} (i-nt)}_{\geq 0}$. Pro $t \in [0, \frac{i}{n}]$ je $(i-nt) > 0$ a pro $t \in (\frac{i}{n}, 1]$

platí $(i-nt) < 0$ a tedy maximum je v bodě $t = i/n$.

2. $1^n = ((1-t)+t)^n = \underbrace{(1-t)^n}_{B_0^n} + \underbrace{\binom{n}{1} t(1-t)^{(n-1)}}_{B_1^n} + \dots + \underbrace{\binom{n}{i} t^i(1-t)^{(n-i)}}_{B_i^n} + \dots + \underbrace{t^n}_{B_n^n}$

3. $B_{n-i}^n(1-t) = \binom{n}{n-i} (1-t)^{n-i} (1-(1-t))^{(n-(n-i))} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)} = B_i^n(t)$

4.

$$(1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) = (1-t)\binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{(n-1-i)} + t\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}(1-t)^{(n-i)} =$$

$$\underbrace{\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]}_{\binom{n}{i}} t^i(1-t)^{n-i} = B_i^n(t)$$

5.

$$B_i^n(t)' = \binom{n}{i} [it^{i-1}(1-t)^{(n-i)} - (n-i)t^i(1-t)^{(n-i-1)}] =$$

$$\frac{n!}{i!(n-i)!} it^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i)!} (n-i)t^i(1-t)^{n-i-1} =$$

$$n \left[\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i(1-t)^{n-i-1} \right] =$$

$$n \left[\binom{n-1}{i-1} t^{i-1}(1-t)^{n-1-(i-1)} - \binom{n-1}{i} t^i(1-t)^{n-1-i} \right] = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

6.

$$\frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) = \frac{n-i+1}{n+1} \binom{n+1}{i} t^i(1-t)^{n+1-i} +$$

$$\frac{i+1}{n+1} \binom{n+1}{i+1} t^{i+1}(1-t)^{n+1-i-1} = \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n+1-i} + \binom{n}{i} t^{i+1}(1-t)^{n-i} =$$

$$\binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i}((1-t) + t) = B_i^n(t)$$

□

Definice 2.3 Mějme posloupnost $n+1$ bodů $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n$. Tyto body nazýváme *řídící body* a lomenou čáru, která je postupně spojuje nazýváme *řídící polygon*. Pak definujeme *Bézierovu křivku*

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

Věta 2.4 *Bézierova křivka leží v konvexním obalu svých řídících bodů.*

Důkaz: Polynomy daného stupně tvoří rozklad jednotky. □

Věta 2.5 *Jestliže $\mathbf{c}(t)$ je Bézierova křivka s řídícími body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ a $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ je Bézierova křivka s řídícími body $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$, kde $\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_{n-i}$, pak $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c}(1-t)$.*

Důkaz: $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \sum_{i=n-j}^n \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \sum_{j=0}^n \tilde{\mathbf{P}}_{n-j} B_{n-j}^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(1-t) = \mathbf{c}(1-t)$.
□

Věta 2.6 Mějme Eukleidovskou shodnost ve tvaru $A\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Jestliže $\mathbf{c}(t)$ je Bézierova křivka s řídicími body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ a $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ je Bézierova křivka s řídicími body $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$, kde $\tilde{\mathbf{P}}_i = A\mathbf{P}_i + \mathbf{a}$, pak $\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$.

Důkaz: $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n (A\mathbf{P}_i + \mathbf{a}) B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n A\mathbf{P}_i B_i^n(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{a} B_i^n(t) = A \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t)}_{=\mathbf{c}(t)} + \mathbf{a} \underbrace{\sum_{i=0}^n B_i^n(t)}_{=1} = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$. □

Věta 2.7 Pro derivaci (hodograph) křivky $\mathbf{c}(t)$ s řídicími body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n$ platí

$$\mathbf{c}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t),$$

kde $\mathbf{Q}_i = n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$.

Důkaz: Pro zjednodušení zápisu značme $B_i^n := B_i^n(t)$. Víme $\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) \Rightarrow$

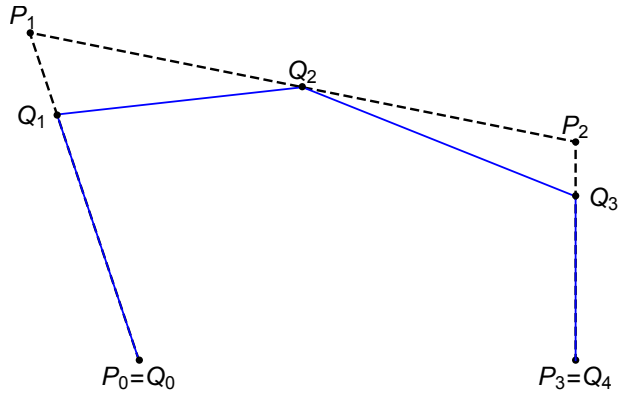
$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) &= \mathbf{P}_0(B_0^n(t))' + \mathbf{P}_1(B_1^n(t))' + \dots + \mathbf{P}_{n-1}(B_{n-1}^n(t))' + \mathbf{P}_n(B_n^n(t))' = \\ &= \mathbf{P}_0 n(B_{-1}^{n-1} - B_0^{n-1}) + \mathbf{P}_1 n(B_0^{n-1} - B_1^{n-1}) + \dots + \mathbf{P}_{n-1} n(B_{n-2}^{n-1} - B_{n-1}^{n-1}) + \mathbf{P}_n n(B_{n-1}^{n-1} - B_n^{n-1}) = \\ &= n\mathbf{P}_0 \underbrace{B_{-1}^{n-1}}_{=0} - n\mathbf{P}_0 B_0^{n-1} + n\mathbf{P}_1 B_0^{n-1} - n\mathbf{P}_1 B_1^{n-1} + \dots + n\mathbf{P}_{n-1} B_{n-2}^{n-1} - n\mathbf{P}_{n-1} B_{n-1}^{n-1} + \\ &= n\mathbf{P}_n B_{n-1}^{n-1} - n\mathbf{P}_n \underbrace{B_n^{n-1}}_{=0} = B_0^{n-1} \underbrace{(n\mathbf{P}_1 - n\mathbf{P}_0)}_{\mathbf{Q}_0} + \dots + B_{n-1}^{n-1} \underbrace{(n\mathbf{P}_n - n\mathbf{P}_{n-1})}_{\mathbf{Q}_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

□

Věta 2.8 (Degree elevation) Křivku $\mathbf{c}(t)$ s řídicími body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n$ lze také vyjádřit jako křivku s řídicími body $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n+1$ a

$$\mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{P}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{P}_i$$

(při využití konvence $f_{P_{-1}} = f_{P_{n+1}} = f_0$).



Důkaz:

- $i = 0 : \mathbf{Q}_0 = \frac{0}{n+1}\mathbf{P}_1 + (1 - \frac{0}{n+1})\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0$
- $0 < i < n + 1 : \mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1}\mathbf{P}_{i-1} + (1 - \frac{i}{n+1})\mathbf{P}_i$
- $i = n + 1 : \mathbf{Q}_{n+1} = \frac{n+1}{n+1}\mathbf{P}_n + (1 - \frac{n+1}{n+1})\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n$

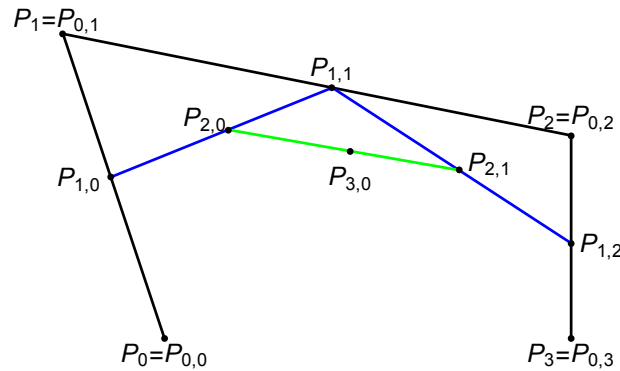
Tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \left[\frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) \right] = \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{P}_i \frac{n-j+1}{n+1} B_j^{n+1}(t) + \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{P}_{j-1} \frac{j}{n+1} B_j^{n+1}(t) = \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \left[\mathbf{P}_j \frac{n-j+1}{n+1} + \mathbf{P}_{j-1} \frac{j}{n+1} \right] B_j^{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \underbrace{\left[\frac{j}{n+1} \mathbf{P}_{j-1} + (1 - \frac{j}{n+1}) \mathbf{P}_j \right]}_{\mathbf{Q}_j} B_j^{n+1}(t) \end{aligned}$$

□

Definice 2.9 Mějme řídicí body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n$ a odpovídající Bézierovu křivku $\mathbf{c}(t)$. *DeCasteljau algoritmus* vypočítá pro každé pevné $t \in [0, 1]$ systém bodů $\mathbf{P}_{i,j}$ indexovaný dvěma indexy $i = 0, \dots, n$ a $j = 0, \dots, (n - i)$ takto:

- pro $i = 0 : \mathbf{P}_{0,j} := \mathbf{P}_j$
- pro $i > 0 : \mathbf{P}_{i,j} := (1 - t)\mathbf{P}_{i-1,j} + t\mathbf{P}_{i-1,j+1}$



Lemma 2.10 V *DeCasteljau algoritmu* s pevným $t \in [0, 1]$ pro každou legální volbu indexů i, k, m platí

$$\mathbf{P}_{i+m,k} = \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t).$$

Důkaz: Indukcí podle m .

- $m = 0$: $\mathbf{P}_{i,k} = \sum_{j=0}^0 \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^0(t) = \mathbf{P}_{i,k}$.
- $m \rightarrow m + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^{m+1}(t) &= \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} [(1-t)B_j^m(t) + tB_{j-1}^m(t)] = \\ (1-t) \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t) + t \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_{j-1}^m(t) &= (1-t) \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t) + t \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k+1} B_j^m(t) = \\ (1-t)\mathbf{P}_{i+m,k} + t\mathbf{P}_{i+m,k+1} &= \mathbf{P}_{i+m+1,k}. \end{aligned}$$

□

Věta 2.11 V algoritmu DeCasteljau $t \in [0, 1]$ je $\mathbf{P}_{n,0} = \mathbf{c}(t)$ a úsečka $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$ je tečnou v tomto bodě.

Důkaz: Z předchozího lemmatu pro $m = n$, $k = 0$, $i = 0$, plyne $\mathbf{P}_{n,0} = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{0,j} B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(t) = \mathbf{c}(t)$. Pro tečnu z předchozího lemmatu a Věty 2.7. máme $\mathbf{P}_{n-1,1} - \mathbf{P}_{n-1,0} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}_{0,j+1} B_j^{n-1}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}_{0,j} B_j^{n-1}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j) B_j^{n-1}(t) = \frac{1}{n} \mathbf{c}'(t)$. Tedy úsečka $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$ leží v lineárním obalu jednotkového tečného vektoru a tedy určuje tečnu. □

Věta 2.12 Křivka $\tilde{c}(s) := \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{j,0} B_j^n(s)$ je reparametrizací první části křivky $c(t)$ na interval $[0, 1]$. Přesněji platí

$$\tilde{c}(s) = c(ts).$$

3 Lagrangeova a Hermitova interpolace

Definice 3.1 Mějme zadány hodnoty proměnné $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \in \mathbb{R}$ a funkční hodnoty $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že polynom $f(x)$ je *Lagrangeovým interpolačním polynomem* těchto hodnot, jestliže platí

$$f(x_i) = f_i, \quad \text{pro } i = 0, \dots, n.$$

Věta 3.2 Pro každé vstupní hodnoty existuje právě jeden interpolant stupně nejvýše n .

Důkaz: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Podmínka: $f(x_i) = f_i$ dává $a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = f_i$. Všechny podmínky dávají soustavu lineárních rovnic s Vandermondovou maticí $M_{n+1 \times n+1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & \dots & x_0^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \dots & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}$$

$\det M = \prod_{j,i=0,i \neq j}^n (x_i - x_j) \neq 0 \Rightarrow M$ regulární, máme jediné řešení $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ \square

Definice (a lemma) 3.3 Pro zadaná $x_0 < x_1 < \dots < x_n \in \mathbb{R}$ definujeme *Lagrangeovy polynomy*

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Mějme funkční hodnoty $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n$, pak pro interpolační polynom z předchozí věty platí, že je roven

$$\sum_{i=0}^n f_i l_i(x).$$

Důkaz: Plyne z toho, že $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. Neboť

- pro $i = j$

$$l_i(x_i) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1 \Rightarrow \delta_{jj} = 1,$$

- pro $i \neq j$

$$l_i(x_j) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_j - x_j}{x_i - x_j} = 0 \Rightarrow \delta_{ij} = 0.$$

Definujme $f(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$, tedy $f(x_j) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x_j) = \sum_{i=0}^n f_i \delta_{ij} = f_j$ \square

Věta 3.4 Mějme $g(x) \in C^2[a, b]$, tedy funkce se spojitou druhou derivací na intervalu $[a, b]$ a označme $K = \max_{x \in [a, b]} |g''(x)|$. Necht' $f(x)$ je lineární Lagrangeův interpolační polynom v bodech a, b , tedy polynom stupně nejvýše 1 splňující

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b).$$

Pak platí

$$\max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)| \leq (b - a)^2 \frac{K}{4 \cdot 2}.$$

Důkaz: Definuji

- $r(x) = g(x) - f(x)$ $r(a) = r(b) = 0$
- $h(x) = (x - a)(b - x)$ $h(a) = h(b) = 0$ a $\max h(x) = h(\frac{a+b}{2}) = (\frac{b-a}{2})^2$
- Zvolme libovolné $x_0 \in (a, b)$. Definujme $F(x) = r(x) - Lh(x)$, kde $L = \frac{r(x_0)}{h(x_0)}$.

Pak $F(a) = F(b) = 0$ a také $F(x_0) = 0$. F je C^2 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existuje

- $x_1 \in (a, x_0)$ takové, že $F'(x_1) = 0$
- $x_2 \in (x_0, b)$ takové, že $F'(x_2) = 0$

Funkce F' je C^1 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existuje $x_3 \in (x_1, x_2)$ takové, že $F''(x_3) = 0$. Zároveň

$$F''(x_3) = r''(x_3) - Lh''(x_3) = g''(x_3) + 2L$$

neboť $h''(x) = -2$ a $f''(x) = 0$. Tedy

$$L = \frac{g''(x_3)}{-2} \quad \Rightarrow \quad |L| \leq \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|r(x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad |r(x_0)| \leq \frac{K}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right)^2$$

□

Definice 3.5 Mějme zadány hodnoty proměnné $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, násobnosti derivací $k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a hodnoty $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že polynom $f(x)$ je *Hermitovým interpolačním polynomem* těchto dat, jestliže

$$f^{(k_i)}(x_i) = f_i, \quad \text{pro } i = 0, \dots, n.$$

Definice 3.6 Fergusonovu bázi polynomů stupně nejvýše 3 definujeme jako posloupnost

$$\mathcal{R} = (r_0(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x)),$$

kde

$$\begin{aligned} r_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3 \\ r_1(x) &= x - 2x^2 + x^3 \\ r_2(x) &= 3x^2 - 2x^3 \\ r_3(x) &= -x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Věta 3.7 Fergusonova báze trivializuje Hermitovu interpolaci prvního řádu v bodech 0 a 1, přesněji

$$f(x) = f_0 r_0(x) + f_1 r_1(x) + f_2 r_2(x) + f_3 r_3(x)$$

je Hermitův interpolant pro hodnoty proměnné $(0, 0, 1, 1)$ a pro násobnosti derivací $(0, 1, 0, 1)$.

Důkaz: Přímým výpočtem: $f'(x) = f_0 r_0'(x) + f_1 r_1'(x) + f_2 r_2'(x) + f_3 r_3'(x)$, kde

$$\begin{aligned} r_0'(x) &= -6x + 6x^2 \\ r_1'(x) &= 1 - 4x + 3x^2 \\ r_2'(x) &= 6x - 6x^2 \\ r_3'(x) &= -2x + 3x^2. \end{aligned}$$

odtud již získáme

$$\begin{aligned} f(0) &= f_0 r_0(0) + f_1 r_1(0) + f_2 r_2(0) + f_3 r_3(0) = f_0 \\ f'(0) &= f_0 r'_0(0) + f_1 r'_1(0) + f_2 r'_2(0) + f_3 r'_3(0) = f_1 \\ f(1) &= f_0 r_0(1) + f_1 r_1(1) + f_2 r_2(1) + f_3 r_3(1) = f_2 \\ f'(1) &= f_0 r'_0(1) + f_1 r'_1(1) + f_2 r'_2(1) + f_3 r'_3(1) = f_3. \end{aligned}$$

Další možností je důkaz provést pomocí matice přechodu k monomiální bázi. \square

Věta 3.8 *Mějme $g(x) \in C^4[a, b]$, tedy funkce se spojitou čtvrtou derivací na intervalu $[a, b]$ a označme $K = \max_{x \in [a, b]} |g^{(4)}(x)|$. Necht' $f(x)$ je C^1 Hermitův interpolační polynom na intervalu $[a, b]$, tedy polynom stupně nejvýše 3 splňující*

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a), \quad f(b) = g(b), \quad f'(b) = g'(b).$$

Pak platí

$$\max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)| \leq (b - a)^4 \frac{K}{16 \cdot 24}.$$

Důkaz: Definuji

- $r(x) = g(x) - f(x) \quad r(a) = r(b) = r'(a) = r'(b) = 0$
- $h(x) = (x - a)^2(b - x)^2 \quad h(a) = h(b) = h'(a) = h'(b) = 0$ a $\max h(x) = h\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^4$
- Zvolme libovolné $x_0 \in (a, b)$. Definujme $F(x) = r(x) - Lh(x)$, kde $L = \frac{r(x_0)}{h(x_0)}$.

Pak $F(a) = F(b) = 0$ a také $F(x_0) = 0$. F je C^4 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existuje

- $x_1 \in (a, x_0)$ takové, že $F'(x_1) = 0$
- $x_2 \in (x_0, b)$ takové, že $F'(x_2) = 0$
- navíc však $F'(a) = F'(b) = 0$.

Funkce F' je C^3 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existují $x_3 \in (a, x_1)$, $x_4 \in (x_1, x_2)$, $x_5 \in (x_2, b)$ takové, že $F''(x_3) = F''(x_4) = F''(x_5) = 0$. Funkce F'' je C^2 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existují $x_6 \in (x_3, x_4)$, $x_7 \in (x_4, x_5)$ takové, že $F'''(x_6) = F'''(x_7) = 0$. Funkce F''' je C^1 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existuje $x_8 \in (x_6, x_7)$ takové, že $F^{(4)}(x_8) = 0$.

Zároveň

$$F^{(4)}(x_8) = r^{(4)}(x_8) - Lh^{(4)}(x_8) = g^{(4)}(x_8) - 24L$$

neboť $h^{(4)}(x) = 24$ a $f^{(4)}(x) = 0$. Tedy

$$L = \frac{g^{(4)}(x_8)}{24} \quad \Rightarrow \quad |L| \leq \frac{K}{24} \quad \Rightarrow \quad \frac{|r(x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \frac{K}{24} \quad \Rightarrow \quad |r(x_0)| \leq \frac{K}{24} \left(\frac{b-a}{2}\right)^4$$

\square

Věta 3.9 Mějme dána C^1 Hermitovská data v rovině, tedy body P_0, P_1 a jednotkové vektory U_0, U_1 . Označme K jedinou kružnici (případně degenerovanou do přímky), která prochází body P_0, P_1 a s vektory U_0, U_1 svírá stejně velký orientovaný úhel. Necht' $J \in \mathbb{R}^2$ je libovolný bod různý od P_0, P_1 . Pak existuje právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky) O_0 interpolující data P_0, U_0 a J a právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky) O_1 interpolující data J, P_1, U_1 . Tyto dva oblouky navazují v bodě J se spojitostí C^1 právě tehdy, když $J \in K$.

Důkaz: Kružnice K realizuje symetrii dat, oblouky O_0, O_1 s ní svírají stejné úhly. □

4 B-spline a NURBs křivky

Definice 4.1 Pro posloupnost reálných čísel (t_0, t_1, \dots, t_m) , $t_i \leq t_{i+1}$ (tzv. uzlů) definujeme rekurentně funkce $N_{i,p}(t)$, $i = 0, \dots, (m - p - 1)$ stupně p takto

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

Pro pevné p označme $n = m - p - 1$ a pro řídicí body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 0, \dots, n$, je *B-spline křivka* stupně p dána vztahem

$$c(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(t), \quad t \in [t_p, t_{m-p}].$$

Definice 4.2 Pro řídicí body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 0, \dots, n$ a váhy těchto bodů $w_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 0, \dots, n$, definujeme racionální Bézierovu křivku

$$\vec{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

Zjevně pro libovolné kladné μ platí, že váhy $\tilde{w}_i = \mu w_i$ definují stejnou parametrickou křivku, protože μ se zkrátí.

Věta 4.3 Necht' $\vec{c}(t)$, $t \in [0, 1]$ je racionální Bézierova křivka s řídicími body $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$ a váhami (w_0, \dots, w_n) . Zvolme $\lambda \in \mathbb{R}^+$ a definujme $\vec{c}(s)$, $s \in [0, 1]$ jako reparametrizaci $\vec{c}(t)$ pomocí funkce

$$t = t(s) = \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1}.$$

Pak $\vec{c}(s)$ je racionální Bézierova křivka s týmiž řídicími body $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$ a s váhami $(\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n)$, kde $\tilde{w}_i = \lambda^i w_i$.

Důkaz: Přímým dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} B_i^n(t(s)) &= \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda s}{(\lambda-1)s+1} \right)^i \left(1 - \frac{\lambda s}{(\lambda-1)s+1} \right)^{(n-i)} = \\ &= \binom{n}{i} \frac{(\lambda s)^i}{[(\lambda-1)s+1]^i} \frac{[(\lambda-1)s+1-\lambda s]^{(n-i)}}{[(\lambda-1)s+1]^{(n-i)}} = \\ &= \binom{n}{i} \frac{\lambda^i}{[(\lambda-1)s+1]^n} s^i (1-s)^{n-i} = B_i^n(s) \frac{\lambda^i}{[(\lambda-1)s+1]^n} \end{aligned}$$

a tedy i

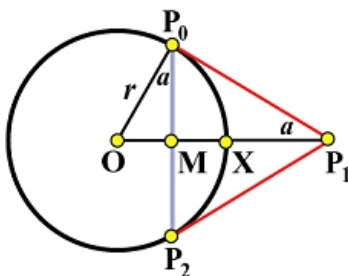
$$\vec{c}(t) = \vec{c}(t(s)) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t(s))}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t(s))} = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i B_i^n(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i B_i^n(s)} = \vec{c}(s).$$

□

Důsledek 4.4 Každou racionální křivku je možno parametrizovat tak, že první a poslední váha je rovna 1.

Důkaz: Mějme křivku s váhami (w_0, w_1, \dots, w_n) a nějakými řídicími body. Řídicí body ponecháme a definujeme nové váhy $\tilde{w}_i = \frac{w_i}{w_0}$, které nám zajistí $\tilde{w}_0 = 1$ a podle Definice 4.2 popisují stejnou parametrizaci. Dále definujeme $\tilde{\tilde{w}}_i = \tilde{w}_n^{-\frac{i}{n}} \tilde{w}_i$, která zajistí $\tilde{\tilde{w}}_0 = \tilde{\tilde{w}}_n = 1$ a podle Věty 4.3 je reparametrizací téže křivky. □

Věta 4.5 Kvadratická racionální Bézierova křivka $\mathbf{c}(t)$, $t \in [0, 1]$ s řídicími body $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ a váhami $(w_0, w_1, w_2) = (1, w, 1)$ je parametrizací kruhového oblouku právě tehdy, když $|\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_2|$, body $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ nejsou kolinéární a $w = \sin a$, kde $a = \frac{\angle \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}{2}$.



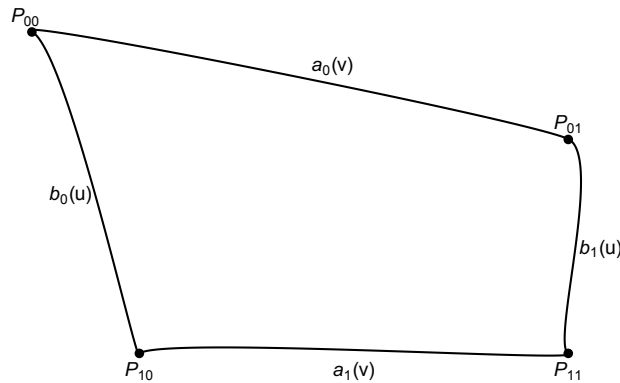
5 Plochy a subdivize

Definice 5.1 Pro dvě prostorové křivky $\mathbf{a}_0(v)$, $\mathbf{a}_1(v)$ parametrizované na stejném intervalu I , definujeme jejich lineární přechodovou plochu

$$\mathbf{P}(u, v) = (1-u)\mathbf{a}_0(v) + u\mathbf{a}_1(v), \quad u \in [0, 1], v \in I.$$

Definice 5.2 Pro prostorové křivky $\mathbf{a}_0(v)$, $\mathbf{a}_1(v)$, $v \in [0, 1]$ a $\mathbf{b}_0(u)$, $\mathbf{b}_1(u)$, $u \in [0, 1]$ takové, že $\mathbf{a}_0(0) = \mathbf{b}_0(0) =: \mathbf{P}_{00}$, $\mathbf{a}_0(1) = \mathbf{b}_1(0) =: \mathbf{P}_{01}$, $\mathbf{a}_1(0) = \mathbf{b}_0(1) =: \mathbf{P}_{10}$, $\mathbf{a}_1(1) = \mathbf{b}_1(1) =: \mathbf{P}_{11}$ definujeme plochu $\mathbf{P}(u, v)$ zvanou *Coonsův bilineární plát* jako řešení rovnice

$$(1 - u, -1, u) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u, v) & \mathbf{b}_1(u) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$



Věta 5.3 *Coonsův bilineární plát interpoluje zadané křivky, přesněji*

$$\mathbf{P}(0, v) = \mathbf{a}_0(v), \quad \mathbf{P}(1, v) = \mathbf{a}_1(v), \quad \mathbf{P}(u, 0) = \mathbf{b}_0(u), \quad \mathbf{P}(u, 1) = \mathbf{b}_1(u).$$

Důkaz: Ukážeme, že $\mathbf{P}(0, v) = \mathbf{a}_0(v)$. Jelikož $u = 0$, máme:

$$(1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(0) & \mathbf{P}(0, v) & \mathbf{b}_1(0) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

tedy

$$(0, \mathbf{a}_0(v) - \mathbf{P}(0, v), 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a}_0(v) + \mathbf{P}(0, v) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}_0(v) = \mathbf{P}(0, v).$$

□

Definice 5.4 *Obdélníková (tensor-product) Bézierova plocha* je pro danou řídicí síť $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ dána parametrizací

$$\mathbf{B}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{P}_{i,j},$$

kde $B_i^m(u)$, $B_j^n(v)$ jsou Bernsteinovy polynomy.

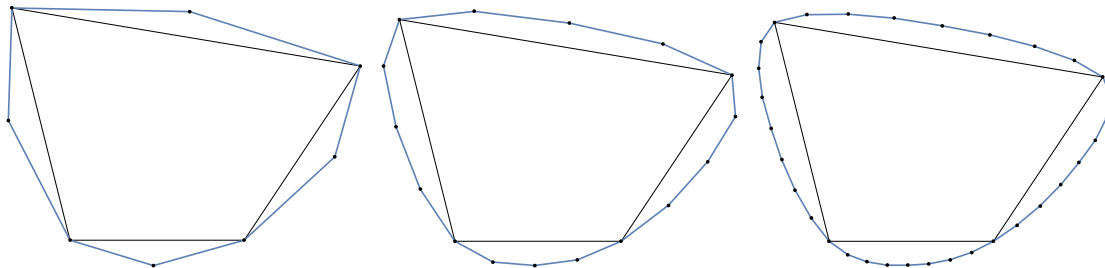
Definice 5.5 NURBS plocha je určena sítí řídicích bodů $\mathbf{P}_{i,j}$, jejich váhami $w_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$, dvěma uzlovými vektory $U = (u_0, \dots, u_k)$ a $V = (v_0, \dots, v_l)$ a stupni p, q . Parametrizace takové NURBS plochy je potom dána vztahem

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}.$$

Definice 5.6 Čtyřbodové schéma pro křivky je interpolační schéma, které mezi každé dva body v_i, v_{i+1} vloží nový bod a původní zůstávají. Geometrická pravidla jsou následující:

$$v'_{2i} = v_i, \quad v'_{2i+1} = -\frac{1}{16}v_{i-1} + \frac{9}{16}v_i + \frac{9}{16}v_{i+1} - \frac{1}{16}v_{i+2}.$$

Čtyřbodové schéma zachovává výchozí řídicí polygon ve všech krocích. Výchozí body jsou tedy obsaženy také v limitní křivce.



Definice 5.7 Doo-Sabin pro plochy je aproximační metoda založená na ořezávání vrcholů dané sítě. Každému vrcholu je přiřazeno tolik nových vrcholů, kolik stěn daný vrchol obsahuje. Metoda vypočte pro každou stěnu její těžiště c jako průměr všech vrcholů. Poté každému vrcholu v_i stěny přiřadí nový vrchol jako střed úsečky c, v_i . Nově vzniklá síť obsahuje stěny tří typů (v závorce je uvedena, barva odpovídající stěně v obrázku):

- F-stěny: (Modrá) Pro každou stěnu původní sítě je vytvořena jedna nová F-stěna a to spojením nových vrcholů dané stěny.
- E-stěny: (Zelená) Jsou sestrojeny pro každou hranu původní sítě propojením čtyř nově vzniklých vrcholů, které jsou obrazy koncových bodů hrany.
- V-stěny: (Červená) Vzniknou spojením nových vrcholů, které byly získány z jednoho vrcholu původní sítě. Pokud měl vrchol valenci n (počet hran vedoucích do vrcholu), je V-stěna n -úhelník.

