Geometrické modelování

Toto je seznam vět a definic, které budou u zkoušky vyžadovány formálně přesně. Týká se to i důkazů, pokud jsou zde uvedeny. Ostatní látka z prezentací bude zkoušena orientačně. Zkouška bude individuální a bude založena především na diskusi nad implementacemi. Přitom se ale ověřuje studentovo pochopení látky.Student rovněž vyřeší několik úloh na papír, mohou vypadat například takto:

1. Formulujte a dokažte větu chybě Lagrangeovy interpolace polynomem stupně 1.
2. Pomocí DeCastelja algoritmu vypočtěte bod $\mathbf{c}(1/2)$ pro Bézierovu křivku s řídícími body $\mathbf{P}_0 = [1, 2]$, $\mathbf{P}_1 = [0, -1]$, $\mathbf{P}_2 = [-1, 1]$. V tomto bodě určete tečnou přímku, znaménkovou křivost a oskulační kružnici.
3. Dokažte vzorec pro derivaci Bézierovy křivky.

1 Křivky v rovině a jejich transformace

Tato kapitola je především výpočetním zopakováním (s několika doplňky) teorie z přednášky Geometrie 1.

Definice 1.1 Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy C^∞) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ se nazývá *parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^2$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrizovaná křivka se nazývá *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0)^T$ pro každé $t \in I$.

Poznámka 1.2 Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na I restrikci na I diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu. Parametrizovaná křivka je charakterizována dvojicí funkcí definovaných na I, tedy $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$. Často není třeba a pro praxi není vhodné, aby $\mathbf{c}$ a ϕ bylo třídy C^∞, ale podle situace postačí nižší hladkost, například C^1, C^2, C^3.

Definice 1.3 Je-li $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ difeomorfismus intervalu $\tilde{I}$ na I, je $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako c. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci*.

Definice (a lemma) 1.4 Délku křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t), t \in I = (\alpha, \beta)$ definujeme jako určitý integrál

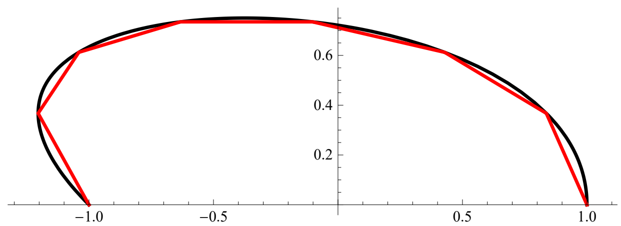
$$\int_\alpha^\beta ||\mathbf{c}'(t)||dt,$$

který nezávisí na parametrizaci. Je-li $r(t) \equiv 1$, řekneme, že křivka je parametrizována jednotkovou rychlostí, nebo také že je *parametrizovaná obloukem*.

Definice 1.5 *Vepsaná lomená čára je definována jako spojnice uspořádaných bodů*

$$\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1), \ldots, \mathbf{c}(t_m),$$

kde $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$.



Věta 1.6 *Délka křivky je suprémem délek všech vepsaných lomených čar, tedy*

$$L(c) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{m} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|, \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta\right\}.$$

Při rozdělení rovnoměrné v parametru

$$t_i = \alpha + \frac{i}{m}(\beta - \alpha) = \left(1 - \frac{i}{m}\right)\alpha + \frac{i}{m}\beta$$

délka lomené čáry L_m *k délce křivky* L *konvergue pro* $m \to \infty$ *jako* $\mathcal{O}(\frac{1}{m^2})$*, tedy existuje konstanta* $K > 0$ *taková, že pro každé* m *platí*

$$(L - L_m) < \frac{K}{m^2}.$$

Definice (a lemma) 1.7 V každém bodě orientované křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t)$ definujeme její rychlosti budeme označovat $r(t) = ||\mathbf{c}'(t)||$. *jednotkový tečný vektor* výrazem

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}.$$

Dále definujeme normálový vektor $\mathbf{n}_*(t)$ tak, aby $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_*(t)\}$ byla kladně orientovaná ortonormální báze $\mathbb{R}^2$. Tyto vektory se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné vektory.

Definice (a lemma) 1.8 Pro regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ definujeme v každém bodě *znaménkovou křivost*

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{||\mathbf{c}'(t)||^3}, \quad t \in I.$$

Znaménková křivost se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci mění znaménková křivost pouze znaménko. Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme *inflexní*.

Definice (a lemma) 1.9 Označme souřadnice bodů v rovině $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Eukleidovské shodnosti (isometrie) jsou právě zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x} + \mathbf{p}$, kde A je orthonormální matice. Takovou shodnost nazýváme přímou, právě když $\det(A) = 1$. Každá přímá shodnost je posunutí (tedy $A = I$) nebo otočení (okolo vhodného bodu).

Věta 1.10 Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou invariantní vůči přímým shodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji mějme přímou shodnost ve tvaru $\mathbf{x} \to A\mathbf{x} + \mathbf{p}$. Máme-li křivku danou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném (neinflexním) bodě κ_z, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_*$, pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = \kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = A\mathbf{t}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = A\mathbf{n}_*$.

Definice 1.11 Pro každou křivku $\mathbf{c}$ definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme její *orientovaný poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + R(t)\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Věta 1.12 Ve svém každém má křivka ze všech přímek kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou. Ve svém každém neinflexním bodě má křivka ze všech kružnic má kontakt nejvyššího řádu s oskulační kružnicí. Navíc, jestliže označíme $N(t)$ normálovou přímku v bodě t, pak v každém neinflexním bodě $\mathbf{c}(t_0)$ platí

$$S(t_0) = \lim_{t->t_0} N(t_0) \cap N(t).$$

Věta 1.13 Pro regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathbf{t}'(t) = r(t)\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t).$$

Existuje hladká funkce $\theta(t) : I \to \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)), \quad t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{r(t)}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $r(t) = 1$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny křivky. Funkce $r(t)$ a $\kappa_z(t)$ určují křivku až na přímou shodnost.

Věta 1.14 Znaménkovou křivost lze přibližně vypočítat z vepsané lomené čáry. Definujme $\vec{\mathbf{v}}_i = \mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})$ a pak lze například přibližně počítat

$$\kappa_z(t_i) \approx \arcsin\left(\frac{\det\{\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_{i+1}\}}{||\vec{\mathbf{v}}_i||||\vec{\mathbf{v}}_{i+1}||}\right) \frac{2}{||\vec{\mathbf{v}}_i|| + ||\vec{\mathbf{v}}_{i+1}||}.$$

Věta 1.15 Je-li $\mathbf{c}(t), t \in [\alpha, \beta]$ jednoduchá regulární hladká uzavřená rovinná křivka, pro kterou navíc $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$, pak

$$\int_c \kappa_z \, \mathrm{ds} = \pm 2\pi.$$

V případě hodnoty 2π nazýváme křivku kladně orientovanou, v případě -2π ji nazýváme záporně orientovanou.

Věta 1.16 Buď $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$, $t \in [\alpha, \beta]$ kladně orientovaná, hladká, regulární jednoduchá, uzavřená křivka. Pak plošný obsah oblasti Int $\mathbf{c}$ je roven

$$\text{Int}\,\mathbf{c} = \int_\alpha^\beta c_x(t)c_y'(t)dt = -\int_\alpha^\beta c_y(t)c_x'(t)dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (c_x c_y' - c_x' c_y)dt.$$

2 Beziérovy křivky

Definice 2.1 *i-tý Bernsteinův polynom stupně n* definujeme jako

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}.$$

Věta 2.2 *Následující vlastnosti platí pro každou volbu indexů. Jestliže je $i < 0$ nebo $i > n$, pak klademe $B_i^n(t) = 0$.*

1. *$B_i^n(t)$ je nezáporný na $[0,1]$ a pro $n > 0$ má na tomto intervalu jediné maximum v bodě $t = i/n$.*
2. *Pro každé n je $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$.*
3. *Symetrie $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$.*
4. *Rekurence*
$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$
5. *Derivace*
$$B_i^n(t)' = n\left(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right).$$
6. *Vnoření prostorů $\mathscr{P}_n[t] < \mathscr{P}_{n+1}[t]$ je realizováno vztahem*
$$B_i^n(t) = \frac{n-i+1}{n+1}B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(t).$$

Důkaz:

1. $B_i^n(t)' = \binom{n}{i}[it^{i-1}(1-t)^{(n-i)} - (n-i)t^i(1-t)^{(n-i-1)}] = \binom{n}{i}t^{i-1}(1-t)^{n-i-1}[i(1-t) - (n-i)t] = \underbrace{\binom{n}{i}t^{i-1}(1-t)^{n-i-1}}_{\geq 0}(i-nt)$. Pro $t \in [0, \frac{i}{n})$ je $(i - nt) > 0$ a pro $t \in (\frac{i}{n}, 1]$ platí $(i - nt) < 0$ a tedy maximum je v bodě $t = i/n$.

2. $1^n = ((1-t)+t)^n = \underbrace{(1-t)^n}_{B_0^n} + \underbrace{\binom{n}{1} t(1-t)^{(n-1)}}_{B_1^n} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{i} t^i(1-t)^{(n-i)}}_{B_i^n} + \cdots + \underbrace{t^n}_{B_n^n}$

3. $B_{n-i}^n(1-t) = \binom{n}{n-i}(1-t)^{n-i}(1-(1-t))^{(n-(n-i))} = \binom{n}{i}t^i(1-t)^{(n-i)} = B_i^n(t)$

4.
$$(1-t)B_i^{n-1}(t)+tB_{i-1}^{n-1}(t) = (1-t)\binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{(n-1-i)}+t\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}(1-t)^{(n-i)} =$$
$$\underbrace{\left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right]}_{\binom{n}{i}}t^i(1-t)^{n-i} = B_i^n(t)$$

5.
$$B_i^n(t)' = \binom{n}{i}[it^{i-1}(1-t)^{(n-i)} - (n-i)t^i(1-t)^{(n-i-1)}] =$$
$$\frac{n!}{i!(n-i)!}it^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)t^i(1-t)^{n-i-1} =$$
$$n\left[\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}t^i(1-t)^{n-i-1}\right] =$$
$$n\left[\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}(1-t)^{n-1-(i-1)} - \binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{n-1-i}\right] = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

6.
$$\frac{n-i+1}{n+1}B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(t) = \frac{n-i+1}{n+1}\binom{n+1}{i}t^i(1-t)^{n+1-i}+$$
$$\frac{i+1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}t^{i+1}(1-t)^{n+1-i-1} = \binom{n}{i}t^i(1-t)^{n+1-i} + \binom{n}{i}t^{i+1}(1-t)^{n-i} =$$
$$\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}((1-t)+t) = B_i^n(t)$$

. $\square$

Definice 2.3 Mějme posloupnost $n+1$ bodů $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \ldots, n$. Tyto body nazýváme *řídící body* a lomenou čáru, která je postupně spojuje nazýváme *řídící polygon*. Pak definujeme *Bézierovu křivku*

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i B_i^n(t), \qquad t \in [0,1].$$

Věta 2.4 *Bézierova křivka leží v konvexním obalu svých řídících bodů.*

Důkaz: Polynomy daného stupně tvoří rozklad jednotky. $\square$

Věta 2.5 *Jestliže* $\mathbf{c}(t)$ *je Bézierova křivka s řídícími body* $\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_n$ *a* $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ *je Bézierova křivka s řídícími body* $\tilde{\mathbf{P}}_0, \ldots, \tilde{\mathbf{P}}_n$*, kde* $\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_{n-i}$*, pak* $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c}(1-t)$.

Důkaz: $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \left|{}^{j=n-i}_{i=n-j}\right| = \sum_{j=0}^{n} \tilde{\mathbf{P}}_{n-j} B_{n-j}^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_j B_j^n(1-t) = \mathbf{c}(1-t)$.
$\square$

Věta 2.6 *Mějme Eukleidovskou shodnost ve tvaru* $A\mathbf{x} + \mathbf{a}$*. Jestliže* $\mathbf{c}(t)$ *je Bézierova křivka s řídícími body* $\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_n$ *a* $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ *je Bézierova křivka s řídícími body* $\tilde{\mathbf{P}}_0, \ldots, \tilde{\mathbf{P}}_n$*, kde* $\tilde{\mathbf{P}}_i = A\mathbf{P}_i + \mathbf{a}$*, pak* $\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$.

Důkaz: $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} (A\mathbf{P}_i + \mathbf{a}) B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} A\mathbf{P}_i B_i^n(t) + \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a} B_i^n(t) =$

$$A \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i B_i^n(t)}_{=\mathbf{c}(t)} + \mathbf{a} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)}_{=1} = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}.$$ $\square$

Věta 2.7 *Pro derivaci (hodograph) křivky* $\mathbf{c}(t)$ *s řídícími body* $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$*, kde* $i = 0, \ldots, n$ *platí*

$$\mathbf{c}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t),$$

kde $\mathbf{Q}_i = n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$.

Důkaz: Pro zjednodušení zápisu značme $B_i^n := B_i^n(t)$. Víme $\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i B_i^n(t) \Rightarrow$

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{P}_0 (B_0^n(t))' + \mathbf{P}_1 (B_1^n(t))' + \cdots + \mathbf{P}_{n-1} (B_{n-1}^n(t))' + \mathbf{P}_n (B_n^n(t))' =$$

$$\mathbf{P}_0 n(B_{-1}^{n-1} - B_0^{n-1}) + \mathbf{P}_1 n(B_0^{n-1} - B_1^{n-1}) + \cdots + \mathbf{P}_{n-1} n(B_{n-2}^{n-1} - B_{n-1}^{n-1}) + \mathbf{P}_n n(B_{n-1}^{n-1} - B_n^{n-1}) =$$

$$n\mathbf{P}_0 \underbrace{B_{-1}^{n-1}}_{=0} - n\mathbf{P}_0 B_0^{n-1} + n\mathbf{P}_1 B_0^{n-1} - n\mathbf{P}_1 B_1^{n-1} + \cdots + n\mathbf{P}_{n-1} B_{n-2}^{n-1} - n\mathbf{P}_{n-1} B_{n-1}^{n-1} +$$

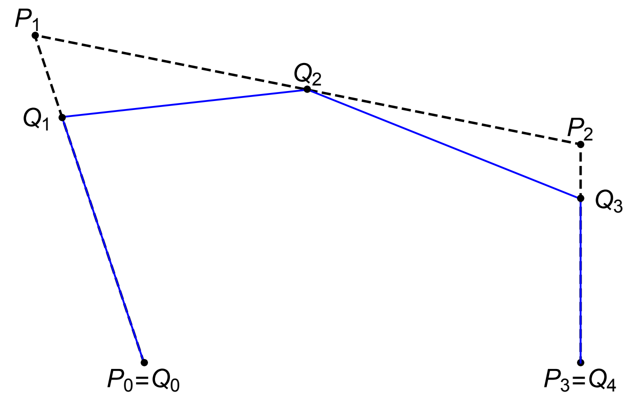
$$n\mathbf{P}_n B_{n-1}^{n-1} - n\mathbf{P}_n \underbrace{B_n^{n-1}}_{=0} = B_0^{n-1} \underbrace{(n\mathbf{P}_1 - n\mathbf{P}_0)}_{\mathbf{Q}_0} + \cdots + B_{n-1}^{n-1} \underbrace{(n\mathbf{P}_n - n\mathbf{P}_{n-1})}_{\mathbf{Q}_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t)$$

$\square$

Věta 2.8 (Degree elevation) *Křivku* $\mathbf{c}(t)$ *s řídícími body* $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$*, kde* $i = 0, \ldots, n$ *lze také vyjádřit jako křivku s řídícími body* $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^N$*, kde* $i = 0, \ldots, n+1$ *a*

$$\mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{P}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{P}_i$$

(při využití konvence $\mathbf{P}_{-1} = \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{0}$*).*



P_1
Q_2
Q_1
P_2
Q_3
P_0=Q_0
P_3=Q_4

Důkaz:

- $i = 0: \ \mathbf{Q}_0 = \frac{0}{n+1}\mathbf{P}_1 + (1 - \frac{0}{n+1})\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0$
- $0 < i < n+1: \ \mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1}\mathbf{P}_{i-1} + (1 - \frac{i}{n+1})\mathbf{P}_i$
- $i = n+1: \ \mathbf{Q}_{n+1} = \frac{n+1}{n+1}\mathbf{P}_n + (1 - \frac{n+1}{n+1})\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n$

Tedy

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i[\frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t)] =$$

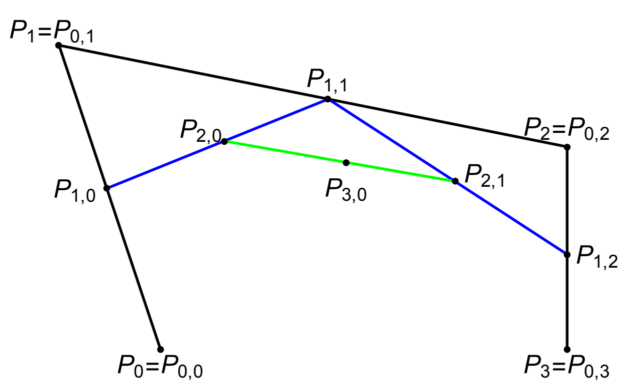
$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{P}_i \frac{n-j+1}{n+1} B_j^{n+1}(t) + \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{P}_{j-1} \frac{j}{n+1} B_j^{n+1}(t) =$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} [\mathbf{P}_j \frac{n-j+1}{n+1} + \mathbf{P}_{j-1} \frac{j}{n+1}] B_j^{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \underbrace{[\frac{j}{n+1}\mathbf{P}_{j-1} + (1 - \frac{j}{n+1})\mathbf{P}_j]}_{\mathbf{Q}_j} B_j^{n+1}(t)$$

. $\square$

Definice 2.9 Mějme řídící body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \ldots, n$ a odpovídající Bézierovu křivku $\mathbf{c}(t)$. *DeCasteljau algoritmus* vypočítá pro každé pevné $t \in [0, 1]$ systém bodů $\mathbf{P}_{i,j}$ indexovaný dvěma indexy $i = 0, \ldots, n$ a $j = 0, \ldots, (n - i)$ takto:

- pro $i = 0 : \mathbf{P}_{0,j} := \mathbf{P}_j$
- pro $i > 0 : \mathbf{P}_{i,j} := (1 - t)\mathbf{P}_{i-1,j} + t\mathbf{P}_{i-1,j+1}$



Lemma 2.10 *V DeCasteljau algoritmu s pevným $t \in [0, 1]$ pro každou legální volbu indexů i, k, m platí*

$$\mathbf{P}_{i+m,k} = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t).$$

Důkaz: Indukcí podle m.

- $m = 0$: $\mathbf{P}_{i,k} = \sum_{j=0}^{0} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^0(t) = \mathbf{P}_{i,k}$.
- $m \to m+1$:

$$\sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^{m+1}(t) = \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} [(1-t)B_j^m(t) + tB_{j-1}^m(t)] =$$

$$(1-t)\sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t) + t\sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_{j-1}^m(t) = (1-t)\sum_{j=0}^{m} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t) + t\sum_{j=0}^{m} \mathbf{P}_{i,j+k+1} B_j^m(t) =$$

$$(1-t)\mathbf{P}_{i+m,k} + t\mathbf{P}_{i+m,k+1} = \mathbf{P}_{i+m+1,k}.$$

□

Věta 2.11 *V algoritmu DeCasteljau $t \in [0,1]$ je $\mathbf{P}_{n,0} = \mathbf{c}(t)$ a úsečka $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$ je tečnou v tomto bodě.*

Důkaz: Z předchozího lemmatu pro $m = n$, $k = 0$, $i = 0$, plyne $\mathbf{P}_{n,0} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_{0,j} B_j^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_j B_j^n(t) = \mathbf{c}(t)$. Pro tečnu z předchozího lemmatu a Věty 2.7. máme $\mathbf{P}_{n-1,1} - \mathbf{P}_{n-1,0} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}_{0,j+1} B_j^{n-1}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}_{0,j} B_j^{n-1}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j) B_j^{n-1}(t) = \frac{1}{n}\mathbf{c}'(t)$. Tedy úsečka $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$ leží v lineárním obalu jednotkového tečného vektoru a tedy určuje tečnu. □

Věta 2.12 *Křivka $\tilde{c}(s) := \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_{j,0} B_j^n(s)$ je reparametrizací první části křivky $c(t)$ na interval $[0,1]$. Přesněji platí*

$$\tilde{c}(s) = c(ts).$$

3 Lagrangeova a Hermitova interpolace

Definice 3.1 Mějme zadány hodnoty proměnné $x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n \in \mathbb{R}$ a funkční hodnoty $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že polynom $f(x)$ je *Lagrangeovým interpolačním polynomem* těchto hodnot, jestliže platí

$$f(x_i) = f_i, \qquad \text{pro } i = 0, \dots, n.$$

Věta 3.2 *Pro každé vstupní hodnoty existuje právě jeden interpolant stupně nejvýše n.*

Důkaz: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. Podmínka: $f(x_i) = f_i$ dává $a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n = f_i$. Všechny podmínky dávají soustavu lineárních rovnic s Vandermondovou maticí $M_{n+1 \times n+1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & . & . & . & x_0^n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & . & . & . & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix}$$

$\det M = \prod_{j,i=0, i\neq j}^{n} (x_i - x_j) \neq 0 \Rightarrow M$ regulární, máme jediné řešení $\begin{pmatrix} a_0 \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ . \\ f_n \end{pmatrix}$ $\square$

Definice (a lemma) 3.3 Pro zadaná $x_0 < x_1 < \ldots < x_n \in \mathbb{R}$ definujeme *Lagrangeovy polynomy*

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Mějme funkční hodnoty $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n$, pak pro interpolační polynom z předchozí věty platí, že je roven

$$\sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x).$$

Důkaz: Plyne z toho, že $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. Neboť

- pro $i = j$
$$l_i(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1 \Rightarrow \delta_{jj} = 1,$$
- pro $i \neq j$
$$l_i(x_j) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_j - x_j}{x_i - x_j} = 0 \Rightarrow \delta_{ij} = 0.$$

Definujme $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$, tedy $f(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f_i \delta_{ij} = f_j$ $\square$

Věta 3.4 *Mějme $g(x) \in C^2[a,b]$, tedy funkce se spojitou druhou derivací na intervalu $[a,b]$ a označme $K = \max_{x\in[a,b]} |g''(x)|$. Nechť $f(x)$ je lineární Lagrangeův interpolační polynom v bodech a, b, tedy polynom stupně nejvýše 1 splňující*

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b).$$

Pak platí

$$\max_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)| \leq (b-a)^2 \frac{K}{4 \cdot 2}.$$

Důkaz: Definuji

- $r(x) = g(x) - f(x) \qquad r(a) = r(b) = 0$
- $h(x) = (x-a)(b-x) \qquad h(a) = h(b) = 0$ a $\max h(x) = h(\frac{a+b}{2}) = (\frac{b-a}{2})^2$
- Zvolme libovolné $x_0 \in (a,b)$. Definujme $F(x) = r(x) - Lh(x)$, kde $L = \frac{r(x_0)}{h(x_0)}$.

Pak $F(a) = F(b) = 0$ a také $F(x_0) = 0$. F je C^2 na $[a,b]$ a podle Rolleovy věty existuje

- $x_1 \in (a, x_0)$ takové, že $F'(x_1) = 0$
- $x_2 \in (x_0, b)$ takové, že $F'(x_2) = 0$

Funkce F' je C^1 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existuje $x_3 \in (x_1, x_2)$ takové, že $F''(x_3) = 0$. Zároveň

$$F''(x_3) = r''(x_3) - Lh''(x_3) = g''(x_3) + 2L$$

neboť $h''(x) = -2$ a $f''(x) = 0$. Tedy

$$L = \frac{g''(x_3)}{-2} \qquad \Rightarrow \qquad |L| \leq \frac{K}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|r(x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \frac{K}{2} \qquad \Rightarrow \qquad |r(x_0)| \leq \frac{K}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

. $\square$

Definice 3.5 Mějme zadány hodnoty proměnné $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, násobnosti derivací $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a hodnoty $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že polynom $f(x)$ je *Hermitovým interpolačním polynomem* těchto dat, jestliže

$$f^{(k_i)}(x_i) = f_i, \qquad \text{pro } i = 0, \ldots, n.$$

Definice 3.6 *Fergusonovu bázi* polynomů stupně nejvýše 3 definujeme jako posloupnost

$$\mathscr{R} = (r_0(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x)),$$

kde

$$\begin{aligned} r_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3 \\ r_1(x) &= x - 2x^2 + x^3 \\ r_2(x) &= 3x^2 - 2x^3 \\ r_3(x) &= -x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Věta 3.7 *Fergusonova báze trivializuje Hermitovu interpolaci prvního řádu v bodech 0 a 1, přesněji*

$$f(x) = f_0 r_0(x) + f_1 r_1(x) + f_2 r_2(x) + f_3 r_3(x)$$

je Hermitův interpolant pro hodnoty proměnné $(0, 0, 1, 1)$ *a pro násobnosti derivací* $(0, 1, 0, 1)$.

Důkaz: Přímým výpočtem: $f'(x) = f_0 r_0'(x) + f_1 r_1'(x) + f_2 r_2'(x) + f_3 r_3'(x)$, kde

$$\begin{aligned} r_0'(x) &= -6x + 6x^2 \\ r_1'(x) &= 1 - 4x + 3x^2 \\ r_2'(x) &= 6x - 6x^2 \\ r_3'(x) &= -2x + 3x^2. \end{aligned}$$

odtud již získáme

$$
\begin{aligned}
f(0) &= f_0 r_0(0) + f_1 r_1(0) + f_2 r_2(0) + f_3 r_3(0) = f_0 \\
f'(0) &= f_0 r_0'(0) + f_1 r_1'(0) + f_2 r_2'(0) + f_3 r_3'(0) = f_1 \\
f(1) &= f_0 r_0(1) + f_1 r_1(1) + f_2 r_2(1) + f_3 r_3(1) = f_2 \\
f'(1) &= f_0 r_0'(1) + f_1 r_1'(1) + f_2 r_2'(1) + f_3 r_3'(1) = f_3.
\end{aligned}
$$

Další možností je důkaz provést pomocí matice přechodu k monomiální bázi. □

Věta 3.8 *Mějme $g(x) \in C^4[a,b]$, tedy funkce se spojitou čtvrtou derivací na intervalu $[a,b]$ a označme $K = \max_{x\in[a,b]} |g''''(x)|$. Nechť $f(x)$ je C^1 Hermitův interpolační polynom na intervalu $[a,b]$, tedy polynom stupně nejvýše 3 splňující*

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a), \quad f(b) = g(b), \quad f'(b) = g'(b).$$

Pak platí

$$\max_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)| \le (b-a)^4 \frac{K}{16 \cdot 24}.$$

Důkaz: Definuji

- $r(x) = g(x) - f(x) \qquad r(a) = r(b) = r'(a) = r'(b) = 0$
- $h(x) = (x-a)^2(b-x)^2 \qquad h(a) = h(b) = h'(a) = h'(b) = 0$ a max $h(x) = h(\frac{a+b}{2}) = (\frac{b-a}{2})^4$
- Zvolme libovolné $x_0 \in (a,b)$. Definujme $F(x) = r(x) - Lh(x)$, kde $L = \frac{r(x_0)}{h(x_0)}$.

Pak $F(a) = F(b) = 0$ a také $F(x_0) = 0$. F je C^4 na $[a,b]$ a podle Rolleovy věty existuje

- $x_1 \in (a, x_0)$ takové, že $F'(x_1) = 0$
- $x_2 \in (x_0, b)$ takové, že $F'(x_2) = 0$
- navíc však $F'(a) = F'(b) = 0$.

Funkce F' je C^3 na $[a,b]$ a podle Rolleovy věty existují $x_3 \in (a, x_1)$, $x_4 \in (x_1, x_2)$, $x_5 \in (x_2, b)$ takové, že $F''(x_3) = F''(x_4) = F''(x_5) = 0$. Funkce F'' je C^2 na $[a,b]$ a podle Rolleovy věty existují $x_6 \in (x_3, x_4)$, $x_7 \in (x_4, x_5)$ takové, že $F'''(x_6) = F'''(x_7) = 0$. Funkce F''' je C^1 na $[a,b]$ a podle Rolleovy věty existuje $x_8 \in (x_6, x_7)$ takové, že $F''''(x_8) = 0$.

Zároveň

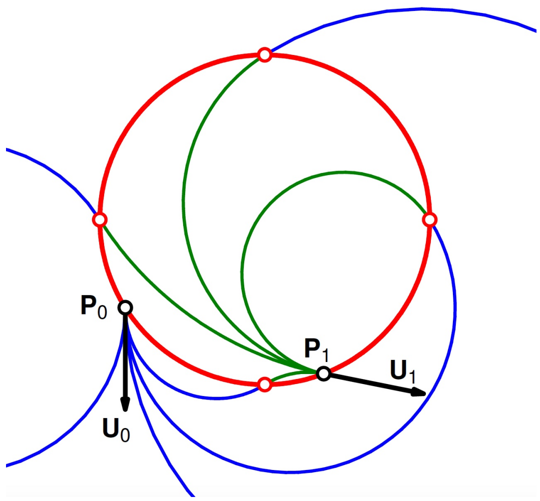
$$F''''(x_8) = r''''(x_8) - Lh''''(x_8) = g''''(x_8) - 24L$$

neboť $h''''(x) = 24$ a $f''''(x) = 0$. Tedy

$$L = \frac{g''''(x_8)}{24} \qquad \Rightarrow \qquad |L| \le \frac{K}{24} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|r(x_0)|}{|h(x_0)|} \le \frac{K}{24} \qquad \Rightarrow \qquad |r(x_0)| \le \frac{K}{24}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4$$

. □

Věta 3.9 *Mějme dána C^1 Hermitovská data v rovině, tedy body P_0, P_1 a jednotkové vektory U_0, U_1. Označme K jedinou kružnici (případně degenerovanou do přímky), která prochází body P_0, P_1 a s vektory U_0, U_1 svírá stejně velký orientovaný úhel.*



Nechť $J \in \mathbb{R}^2$ je libovolný bod různý od P_0, P_1. Pak existuje právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky) O_0 interpolující data P_0, U_0 a J a právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky) O_1 interpolující data J, P_1, U_1. Tyto dva oblouky navazují v bodě J se spojitostí C^1 právě tehdy, když $J \in K$.

Důkaz: Střed kružnice K musí ležet na ose bodů P_0 a P_1 a zároveň na ose bodů $P_0 + U_0$ a $P_1 + U_1$, taková kružnice je tedy právě jedna. Rovněž interpolující oblouky jsou jednoznačné, jejich střed leží na kolmici k U_i bodem P_i a zároveň na ose bodů P_i a J. Body P_0, P_1 a J určují právě jednu kružnici (případně degenerovanou do přímky). Jestliže se jedná o kružnici K, tak oblouky naváží C^1 z rovnosti obou úhlů mezi dvěma kružnicemi. V opačném případě jsou úhly různé. $\square$

4 B-spline a NURBs křivky

Definice 4.1 Pro posloupnost reálných čísel $(t_0, t_1, \dots, t_m)$, $t_i \leq t_{i+1}$ (tzv. uzlů) definujeme rekurentně funkce $N_{i,p}(t), i = 0, \dots, (m-p-1)$ stupně p takto

$$\begin{aligned} N_{i,0}(t) &= \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \\ N_{i,p}(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \end{aligned}$$

Počet opakování daného uzlu t_i v uzlové posloupnosti se nazývá násobnost uzlu.

Věta 4.2 Pro pevný stupeň $p \geq 0$ a uzlovou posloupnost $(t_0, t_1, \ldots, t_m)$, kde $m > 2p$, ve které má každý uzel násobnost nejvýše $p+1$ tvoří funkce $N_{i,p}(t)$, $i = 0, \ldots, (m-p-1)$ bázi prostoru všech funkcí, které jsou definovány na $[t_p, t_{m-p}]$, zúženy na každý podinterval uzlové posloupnosti jsou to polynomy stupně nejvýše p a v bodě t_i mají hladkost $p - k_i$, kde k_i je násobnost uzlu t_i.

Definice 4.3 Pro pevný stupeň p označme $n = m-p-1$ a pro řídící body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 0, \ldots, n$, je *B-spline křivka* stupně p dána vztahem

$$c(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i N_{i,p}(t), \qquad t \in [t_p, t_{m-p}].$$

Definice 4.4 *Pro řídící body* $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$*,* $i = 0, \ldots, n$ *a váhy těchto bodů* $w_i \in \mathbb{R}^+$*,* $i = 0, \ldots, n$ *, definujeme* racionální Bézierovu křivku

$$\vec{\mathbf{c}}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}.$$

Zjevně pro libovolné kladné μ *platí, že váhy* $\tilde{w}_i = \mu w_i$ *definují stejnou parametrickou křivku, protože* μ *se zkrátí.*

Věta 4.5 *Nechť* $\vec{\mathbf{c}}(t)$*,* $t \in [0,1]$ *je racionální Bézierova křivka s řídícími body* $(\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_n)$ *a váhami* $(w_0, \ldots, w_n)$*. Zvolme* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *a definujme* $\vec{\mathbf{c}}(s)$*,* $s \in [0,1]$ *jako reparametrizaci* $\vec{\mathbf{c}}(t)$ *pomocí funkce*

$$t = t(s) = \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1}.$$

Pak $\vec{\mathbf{c}}(s)$ *je racionální Bézierova křivka s týmiž řídícími body* $(\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_n)$ *a s váhami* $(\tilde{w}_0, \ldots, \tilde{w}_n)$*, kde* $\tilde{w}_i = \lambda^i w_i$*.*

Důkaz: Přímým dosazením dostáváme

$$B_i^n(t(s)) = \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda s}{(\lambda-1)s+1} \right)^i \left(1 - \frac{\lambda s}{(\lambda-1)s+1} \right)^{(n-i)} =$$

$$\binom{n}{i} \frac{(\lambda s)^i}{[(\lambda-1)s+1]^i} \frac{[(\lambda-1)s+1-\lambda s]^{(n-i)}}{[(\lambda-1)s+1]^{(n-i)}} =$$

$$\binom{n}{i} \frac{\lambda^i}{[(\lambda-1)s+1]^n} s^i (1-s)^{n-i} = B_i^n(s) \frac{\lambda^i}{[(\lambda-1)s+1]^n}$$

a tedy i

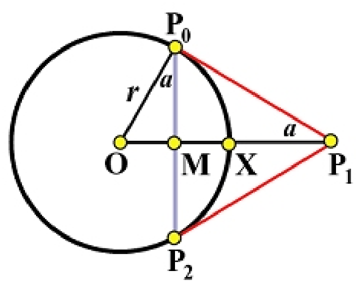
$$\vec{\mathbf{c}}(t) = \vec{\mathbf{c}}(t(s)) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t(s))}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t(s))} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \lambda^i w_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^{n} \lambda^i w_i B_i^n(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i B_i^n(s)} = \vec{\mathbf{c}}(s).$$

$\square$

Důsledek 4.6 *Každou racionální křivku je možno parametrizovat tak, že první a poslední váha je rovna* 1.

Důkaz: Mějme křivku s váhami $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ a nějakými řídícími body. Řídící body ponecháme a definujeme nové váhy $\tilde{w}_i = \frac{w_i}{w_0}$, které nám zajistí $\tilde{w}_0 = 1$ a podle Definice 4.4 popisují stejnou parametrizaci. Dále definujeme $\tilde{\tilde{w}}_i = \tilde{w}_n^{-\frac{i}{n}} \tilde{w}_i$, která zajistí $\tilde{\tilde{w}}_0 = \tilde{\tilde{w}}_n = 1$ a podle Věty 4.5 je reparametrizací téže křivky. $\square$

Věta 4.7 *Kvadratická racionální Bézierovu křivka* $\mathbf{c}(t)$, $t \in [0,1]$ *s řídícími body* $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ *a váhami* $(w_0, w_1, w_2) = (1, w, 1)$ *je parametrizací kruhového oblouku právě tehdy, když* $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$, *body* $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ *neleží na přímce a* $w = \sin a$, *kde* $a = \frac{\angle \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}{2}$.



Důkaz: Jestliže jsou body $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ kolineární, pak je křivka podivně parametrizovanou úsečkou, protože musí ležet v jejich konvexním obalu. Pokud $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \neq |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$, pak se nemůže jednat o kruhový oblouk, protože tečny ke kružnice z daného bodu $\mathbf{P}_1$ musí být stejně dlouhé. Kružnice, která prochází body $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}_2$ a dotýká se přímek $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ bude mít střed v bodě $O = [-\frac{k^2}{l}, 0]$ a poloměr $r = \frac{k\sqrt{k^2+l^2}}{l}$.

Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že $\mathbf{P}_0 = [0, k]$, $\mathbf{P}_1 = [l, 0]$, $\mathbf{P}_2 = [0, -k]$, kde $k, l > 0$.

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{P}_0 B_0^2(t) + w\mathbf{P}_1 B_1^2(t) + \mathbf{P}_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)}$$

Pro libovolnou hodnotu w je racionální kvadratická Bézierova křivka, pro kterou platí $\mathbf{c}(\frac{1}{2}) = [\frac{lw}{l+w}, 0]$

5 Plochy a subdivize

Definice 5.1 Pro dvě prostorové křivky $\mathbf{a}_0(v)$, $\mathbf{a}_1(v)$ parametrizované na stejném intervalu I, definujeme jejich *lineární přechodovou plochu*

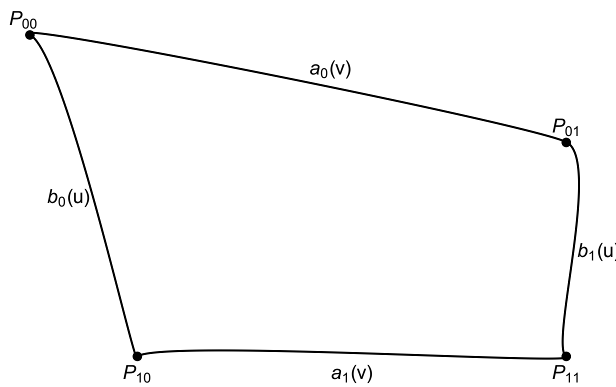
$$\mathbf{P}(u, v) = (1-u)\mathbf{a}_0(v) + u\mathbf{a}_1(v), \qquad u \in [0,1],\ v \in I.$$

Definice 5.2 Pro prostorové křivky $\mathbf{a}_0(v)$, $\mathbf{a}_1(v)$, $v \in [0,1]$ a $\mathbf{b}_0(u)$, $\mathbf{b}_1(u)$, $u \in [0,1]$ takové, že

$$\mathbf{a}_0(0) = \mathbf{b}_0(0) =: \mathbf{P}_{00},\ \mathbf{a}_0(1) = \mathbf{b}_1(0) =: \mathbf{P}_{01},\ \mathbf{a}_1(0) = \mathbf{b}_0(1) =: \mathbf{P}_{10},\ \mathbf{a}_1(1) = \mathbf{b}_1(1) =: \mathbf{P}_{11}$$

definujeme plochu $\mathbf{P}(u,v)$ zvanou *Coonsův bilineární plát* jako řešení rovnice

$$(1-u,-1,u) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u,v) & \mathbf{b}_1(u) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$



Věta 5.3 *Coonsův bilineární plát interpoluje zadané křivky, přesněji*

$$\mathbf{P}(0,v) = \mathbf{a}_0(v),\ \mathbf{P}(1,v) = \mathbf{a}_1(v),\ \mathbf{P}(u,0) = \mathbf{b}_0(u),\ \mathbf{P}(u,1) = \mathbf{b}_1(u).$$

Důkaz: Ukážeme, že $\mathbf{P}(0,v) = \mathbf{a}_0(v)$. Jelikož $u = 0$, máme:

$$(1,-1,0) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(0) & \mathbf{P}(0,v) & \mathbf{b}_1(0) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

tedy

$$(0, \mathbf{a}_0(v) - \mathbf{P}(0,v), 0) \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0} \ \Rightarrow -\mathbf{a}_0(v) + \mathbf{P}(0,v) = 0 \ \Rightarrow \mathbf{a}_0(v) = \mathbf{P}(0,v).$$

$\square$

Definice 5.4 *Obdélníková (tensor-product) Bézierova plocha* je pro danou řídící síť $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 0,\dots,m$, $j = 0,\dots,n$ dána parametrizací

$$\mathbf{B}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{P}_{i,j},$$

kde $B_i^m(u)$, $B_j^n(v)$ jsou Bernsteinovy polynomy.

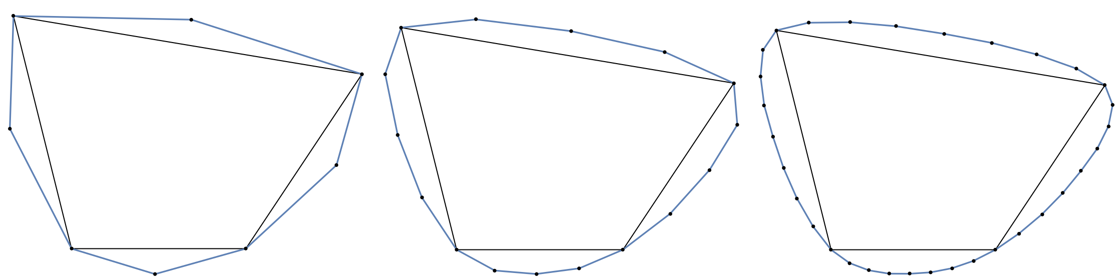
Definice 5.5 *NURBS plocha* je určena sítí řídících bodů $\mathbf{P}_{i,j}$, jejich váhami $w_{i,j}$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$, dvěma uzlovými vektory $U = (u_0, \ldots, u_k)$ a $V = (v_0, \ldots, v_l)$ a stupni p, q. Parametrizace takové NURBS plochy je potom dána vztahem

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}.$$

Definice 5.6 *Čtyřbodové schéma pro křivky* je interpolační schéma, které mezi každé dva body v_i, v_{i+1} vloží nový bod a původní zůstávají. Geometrická pravidla jsou následující:

$$v'_{2i} = v_i,\ v'_{2i+1} = -\frac{1}{16} v_{i-1} + \frac{9}{16} v_i + \frac{9}{16} v_{i+1} - \frac{1}{16} v_{i+2}.$$

Čtyřbodové schéma zachovává výchozí řídící polygon ve všech krocích. Výchozí body jsou tedy obsažené také v limitní křivce.



Definice 5.7 *Doo-Sabin pro plochy* je aproximační metoda založená na ořezávání vrcholů dané sítě. Každému vrcholu je přiřazeno tolik nových vrcholů, kolik stěn daný vrchol obsahuje. Metoda vypočte pro každou stěnu její těžiště c jako průměr všech vrcholů. Poté každému vrcholu v_i stěny přiřadí nový vrchol jako střed úsečky c, v_i. Nově vzniklá síť obsahuje stěny tří typů (v závorce je uvedena, barva odpovídající stěně v obrázku):

- F-stěny: (Modrá) Pro každou stěnu původní sítě je vytvořena jedna nová F-stěna a to spojením nových vrcholů dané stěny.
- E-stěny: (Zelená) Jsou sestrojeny pro každou hranu původní sítě propojením čtyř nově vzniklých vrcholů, které jsou obrazy koncových bodů hrany.
- V-stěny: (Červená) Vzniknou spojením nových vrcholů, které byly získány z jednoho vrcholu původní sítě. Pokud měl vrchol valenci n (počet hran vedoucích do vrcholu), je V-stěna $n-$úhelník.