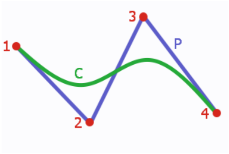
Geometrické modelování

Zbyněk Šír

Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta

Bézierovy křivky

Bézierova křivka - ideál geometrického modelování



Vše je založeno na Bernsteinově bázi polynomů stupně nejvýše n

$$\mathcal{B}_n = \left(B_0^n(t), B_1^n(t), \cdots, B_n^n(t)\right),$$

kde $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}$. Křivku potom parametrizujeme jako

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i B_i^n(t),$$

kde $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ jsou řídící body.

Vlastnosti Bernsteinovy báze

- Vznikla jako pravděpodobnostní funkce při konstrukčním důkazu Weierstrassovy věty.
- Nezápornost, symetrie a rozložní extrémů poskytují ideální modelářský základ.
- Rozklad jednotky poskytuje convex hall a variation diminishing vlastnosti.
- Algebraické vlastnosti Baze poskytují jednoduché algoritmy De Casteljau, degree elevation a pro derivování.
- Nejstabilnější báze na intervalu $[0, 1]$.
- Téma je standartní, viz např.

  `http://pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/`.

Bernsteinovy polynomy

- **Definice:** i-tý Bernsteinův polynom stupně n definujeme jako
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}.$$
- Tento výraz udává pravděpodobnost, že při n opakování náhododného jevu, který má pravděpodobnost t, tento jev nastane právě i-krát.
- $\mathcal{B}_n = \left(B_0^n(t), B_1^n(t), \cdots, B_n^n(t)\right)$ je báze $\mathcal{P}_n[t]$, tedy polynomů stupně nejvýše n. Jedná se o numericky nejstabilnější bázi vzhledem k L_2 normě.
- Pro každou funkci $f(t)$ spojitou na intervalu $[0,1]$ definuji
$$f_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) B_i^n(t).$$
Pak platí $f_n \rightrightarrows f$ (Bernstein 1912).

Vlastnosti Bernsteinovy polynomy

Věta: Následující vlastnosti platí pro každou volbu indexů. Jestliže je $i < 0$ nebo $i > n$, pak klademe $B_i^n(t) = 0$.

- $B_i^n(t)$ je nezáporný na $[0, 1]$ a pro $n > 0$ má na tomto intervalu jediné maximum v bodě $t = i/n$
- Pro každé n je $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$
- Symetrie $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1 - t)$
- Rekurence

$$B_i^n(t) = (1 - t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

- Derivace

$$B_i^n(t)' = n\left(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right)$$

- Vnoření prostorů $\mathcal{P}_n[t] < \mathcal{P}_{n+1}[t]$ je realizováno vztahem

$$B_i^n(t) = \frac{n - i + 1}{n + 1} B_i^{n+1}(t) + \frac{i + 1}{n + 1} B_{i+1}^{n+1}(t).$$

Bézierovy křivky

- **Definice:** Mějme posloupnost $n+1$ bodů $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n$. Tyto body nazýváme *řídící body* a lomenou čáru, která je postupně spojuje nazýváme *řídící polygon*. Pak definujeme Bézierovu křivku

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i B_i^n(t), \qquad t \in [0,1].$$

- **Věta:** Bézierova křivka leží v konvexním obalu svých řídících bodů.
- **Věta:** Jestliže $\mathbf{c}(t)$ je Bézierova křivka s řídícími body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ a $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ je Bézierova křivka s řídícími body $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$, kde $\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_{n-i}$, pak $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c}(1-t)$.
- **Věta:** Mějme Eukleidovskou shodnost ve tvaru $A\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Jestliže $\mathbf{c}(t)$ je Bézierova křivka s řídícími body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ a $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ je Bézierova křivka s řídícími body $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$, kde $\tilde{\mathbf{P}}_i = A\mathbf{P}_n + \mathbf{a}$, pak $\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$.

Hodograph (tečný vektor)

- **Věta:** Pro derivaci (hodograph) křivky $\mathbf{c}(t)$ s řídícími body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \ldots, n$ platí

$$\mathbf{c}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t),$$

kde $\mathbf{Q}_i = n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$.

Degree elevation

- **Věta:** Křivky $\mathbf{c}(t)$ s řídícími body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \ldots, n$ lze také vyjádřit jako křivku s řídícími body $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \ldots, n+1$ a

$$\mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1}\mathbf{P}_{i-1} + (1 - \frac{i}{n+1})\mathbf{P}_i$$

(při využítí konvence $\mathbf{P}_{-1} = \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{0}$.

DeCasteljau algoritmus

- **Definice:** Mějme řídící body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \ldots, n$ a odpovídající Bézierovu křivku $\mathbf{c}(t)$. DeCasteljau algoritmus vypočítá pro každé pevné $t \in [0, 1]$ systém bodů $\mathbf{P}_{i,j}$ indexovaný dvěma indexy $i = 0, \ldots, n$ a $j = 0, \ldots, (n - i)$ takto:
  - $\mathbf{P}_{0,j} := \mathbf{P}_j$
  - $\mathbf{P}_{i,j} := (1 - t)\mathbf{P}_{i-1,j} + t\mathbf{P}_{i-1,j+1}$ pro $i > 0$
- **Věta:** $\mathbf{P}_{n,0} = \mathbf{c}(t)$ a úsečka $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$ je tečnou v tomto bodě.
- **Věta:** $\mathbf{P}_{i,0}$, $i = 0, \ldots, n$ jsou řídícími body části křivky $\mathbf{c}$ na intervalu $[0, t]$ a body $\mathbf{P}_{n-i,i}$, $i = 0, \ldots, n$ jsou řídícími body části křivky na intervalu $[t, 1]$.